Aufgaben zum Wachstum

Zentralen Klassenarbeiten 1986 - 2009

Baden-Württemberg

Hilfsmittel: Taschenrechner und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Stoffgebiet in Klasse 9

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juli 2015

Aufgabe 1 (ZK 1986)

a) Herr Schmidt gewinnt K_0= 10.000 € im Lotto. Er legt dieses Geld bei seiner Bank zu 6% Zinseszins fest an. Wie groß ist sein Guthaben nach 5 Jahren ?
In welcher Zeit würde sich sein Guthaben verdoppeln ?

b) Frau Kern legt ihren Lottogewinn T_0 ebenfalls zu 6% Zinseszins an.
In welcher Zeit würde sich ihr Guthaben verdoppeln ?

Aufgabe 2 (ZK 1988)

a) Eine Kolonie von 1000 Bakterien verdoppelt sich unter Laborbedingungen jeweils in 36 Stunden . In welcher Zeit verzehnfacht sie sich ? (Runde auf volle Tage .)

b) Die Kolonie von 1000 Bakterien wächst zunächst 9 Tage lang unter den Laborbedingungen aus Teilaufgabe a) . Danach werden die Bedingungen so verändert, dass sich die Anzahl der Bakterien täglich halbiert .
Nach wie vielen Tagen (von Anfang an gerechnet) ist die ursprüngliche Anzahl von 1000 Bakterien wieder erreicht ?

(...)

Aufgabe 14 (ZK 1998)

Ein Walnussbaum ist bei Beobachtungsbeginn 3,6m hoch.
Ein Jahr später misst er schon 4,1m.

a) Man nimmt an, dass der Baum exponentiell wächst. Wie hoch wäre er 4 Jahre nach Beobachtungsbeginn ? (Runde auf dm). Wann wäre er etwa 15m hoch ?

b) Das Baumwachstum bis zur Endhöhe von 15m wird durch logistisches Wachstum besser beschrieben. Dabei gilt:

$$H(n+1) = H(n) + k \cdot H(n) \cdot (15 - H(n))$$

wobei H(n) die Baumhöhe (in Metern) nach n Jahren angibt.
Welche Baumhöhe ist dann 4 Jahre nach Beobachtungsbeginn zu erwarten ?

Lösung Aufgabe 1 (ZK 1986)

a) Guthaben nach 5 Jahren : $K_5 = 10.000 \cdot 1{,}06^5 = 13.382{,}26$ €

Verdoppelungszeit = Zeitdauer, bis der Betrag auf 20.000 DM angewachsen ist :

$$20.000 = 10.000 \cdot 1{,}06^t \Leftrightarrow 2 = 1{,}06^t \Leftrightarrow \log 2 = t \cdot \log 1{,}06 \Leftrightarrow t = \frac{\log 2}{\log 1{,}06} = 11{,}9 \text{ Jahre.}$$

Das Guthaben verdoppelt sich ungefähr alle 12 Jahre.

b) Das Anfangskapital ist nun unbekannt. Nach n Jahren besitzt Frau Kern ein Kapital von $K_n = T_0 \cdot 1{,}06^n$

Verdoppelungszeit = Zeitdauer, bis der Betrag auf $2 \cdot T_0$ angewachsen ist:

$2 \cdot T_0 = T_0 \cdot 1{,}06^n \Leftrightarrow 2 = 1{,}06^n \Leftrightarrow n = 11{,}9$ Jahre (siehe a))

Die Verdoppelungszeit von knapp 12 Jahren ist unabhängig von der Höhe des Anfangskapitals.

Lösung Aufgabe 2 (ZK 1988)

a) Aufgrund der angegebenen Verdoppelungszeit liegt ein exponentielles Wachstum vor.

$B(t) = B(0) \cdot a^t$ wobei t die Zeit in Stunden ist.

$B(t) = 1000 \cdot a^t$

Nach 36 Stunden sind 2000 Bakterien vorhanden: $2000 = 1000 \cdot a^{36} \Rightarrow a = \sqrt[36]{2} = 1{,}0194$

Wachstumsgleichung: $B(t) = 1000 \cdot 1{,}0194^t$

Verzehnfachung: $10000 = 1000 \cdot 1{,}0194^t \Rightarrow t = \frac{\log 10}{\log 1{,}0194} = 119{,}8$ Stunden

Eine Verzehnfachung ergibt sich nach ca. 5 Tagen.

b) Aus a): $B(t) = 1000 \cdot 1{,}0194^t$

Bestand nach 9 Tagen (=216 Stunden) $B(216) = 1000 \cdot 1{,}0194^{216} = 63451$ Bakterien

Nun halbiert sich der Bestand pro Tag:

$B(t) = B(0) \cdot 0{,}5^t$ wobei t die Zeit in Tagen ist.

Nun sei 63451 der Anfangsbestand und es wird ermittelt, wie lange es dauert, bis wieder 1000 Bakterien vorhanden sind:

$$1000 = 63451 \cdot 0{,}5^t \Rightarrow 0{,}01576 = 0{,}5^t \Rightarrow t = \frac{\log 0{,}01576}{\log 0{,}5} = 6 \text{ Tage}$$

Von Beginn an gerechnet dauert es 9 + 6 = 15 Tage, bis wieder 1000 Bakterien erreicht sind.

Lösung Aufgabe 14 (ZK1998)

a) Es gilt $B(t) = 3{,}6 \cdot a^t$. Mit $B(1) = 4{,}1$ folgt $4{,}1 = 3{,}6 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = 1{,}139$

Also Wachstumsgesetz $B(t) = 3{,}6 \cdot 1{,}139^t$

Höhe nach 4 Jahren: $B(4) = 3{,}6 \cdot 1{,}139^4 = 6{,}06$ m

Zeit, bis der Baum 15m hoch ist:

$$15 = 3{,}6 \cdot 1{,}139^t \Leftrightarrow \frac{15}{3{,}6} = 1{,}139^t \Leftrightarrow \log 4{,}167 = t \cdot \log 1{,}139 \Leftrightarrow t = \frac{\log 4{,}167}{\log 1{,}139} \approx 11 \text{ Jahre}$$

b) Mit H(0) = 3,6 und H(1) = 4,1 ergibt sich durch Einsetzen in die Gleichung

$$4{,}1 = 3{,}6 + k \cdot 3{,}6 \cdot (15 - 3{,}6) \Rightarrow 0{,}5 = k \cdot 3{,}6 \cdot 11{,}4 = 0{,}0122$$

Wachstumsgesetz: $H(n+1) = H(n) + 0{,}0122 \cdot H(n) \cdot (15 - H(n))$

Höhe nach 4 Jahren (mit Taschenrechner): B(2) = 4,65m B(3) = 5,23m B(4) = 5,86m