Begleitbuch für Mathematik Oberstufe
für die Abiturprüfungen 2019 und 2020
Baden-Württemberg - allgemeine Gymnasien

Teilgebiet Stochastik

Dipl.-Math. Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: **www.mathe-aufgaben.com**

Vorwort

Zunächst einmal bedanke ich mich bei euch für das Vertrauen, das ihr mir mit dem Kauf dieses Buches für die Abiturprüfung in Mathematik entgegengebracht habt!
Das Buch enthält den kompletten Stoff der **Stochastik**, der für die **Abiturprüfungen 2019 und 2020** von **Baden-Württemberg** für **allgemeinbildende Gymnasien** relevant ist.
Da die Stochastik auch Themen umfasst, die in der Mittelstufe in den Klassen 8 und 9 behandelt werden (z.B. Baumdiagramme), wird auch dieser Stoff in dem Buch vorgestellt.

Ich habe mir zum Ziel gesetzt, alle Themen so verständlich wie möglich darzustellen und auf „fachchinesisch“ zu verzichten (gemäß Albert Einstein: „Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher“).

In jedem Kapitel werden die wesentlichen Inhalte zu jedem Thema ausführlich beschrieben.
Die Beispielrechnungen dienen dazu, die Beschreibungen noch konkreter zu erläutern.

Wichtige Formeln oder Rechenverfahren sind in dem Buch mit einem fetten Rahmen dargestellt.

Außerdem solltet ihr euch im Vorfeld der Abiturprüfung bzw. einer Klausur mit der "Merkhilfe" (kurze Formelsammlung) vertraut machen, die ihr im Teil mit Hilfsmittel verwenden dürft.
Die Merkhilfe für die Stochastik findet ihr auf Seite iii in diesem Buch.

VORSICHT FALLE:
Nach meiner Erfahrung hilft es Schülern, wenn man nicht nur darstellt, wie etwas gemacht wird, sondern auch, welche Fehler auftreten können.
Ich habe daher typische Fehler und Irrtümer dargestellt, die Schüler aufgrund meiner langjährigen Erfahrung immer wieder machen. Wer diese "Fettnäpfchen" kennt, kann ihnen besser ausweichen.

Um zu prüfen, ob ihr den Stoff auch verstanden habt, finden sich in dem Buch 60 Übungsaufgaben.
Speziell zur Vorbereitung auf die Abiturprüfung habe ich zusätzlich eine Aufgabensammlung im Abiturstil im Angebot (durch die neue Prüfungsordnung ab 2019 könnt ihr die Abitur-Prüfungsaufgaben bis 2018 insbesondere im Wahlteil leider nicht zur Prüfungsvorbereitung nutzen).

Die Musterlösungen aller Übungsaufgaben aus dem Buch werden als pdf-Dateien über einen geschlossenen Download-Bereich auf meiner Homepage zur Verfügung gestellt.
Ihr habt als Besteller des Buches die Zugangsdaten zu diesem Bereich von mir per Mail erhalten.

Hinweis zur Abiturprüfung:
Im ersten Teil der Abiturprüfung darf kein Taschenrechner und keine Merkhilfe genutzt werden.
Im zweiten Teil darf der wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) sowie die Merkhilfe (MH) genutzt werden.
Alle Aufgaben, bei denen ihr einen Taschenrechner und die Merkhilfe verwenden dürft, habe ich durch die Kennung **(WTR, MH)** ergänzt.

Anregungen und konstruktive Kritik zu diesem Buch werden von mir gerne entgegengenommen und bei der nächsten Aktualisierung berücksichtigt.

Weitere Informationen zur Abiturprüfung für berufliche Gymnasien findet ihr auf www.mathe-aufgaben.com.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und alles Gute für eure Abiturprüfung!

Alexander Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Auszug aus der Merkhilfe

Wahrscheinlichkeit

Gegenereignis	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Additionssatz	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
Spezieller Multiplikationssatz	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ A,B unabhängig

Pfadregeln für Baumdiagramme

Die Wahrscheinlichkeiten längs eines Pfades werden multipliziert.

Die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Pfade werden addiert.

Erwartungswert einer **Zufallsvariable** X mit den Werten $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$E(X) = x_1 \cdot P(X = x_1) + x_2 \cdot P(X = x_2) + \ldots + x_n \cdot P(X = x_n)$$

Binomialverteilung:

Formel von Bernoulli $P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

Erwartungswert $E(X) = n \cdot p$

Statistische Tests

Beim Testen einer Hypothese H_0 können folgende Fehler auftreten:

	H_0 ist wahr	H_0 ist falsch
H_0 wird verworfen	Fehler 1. Art	richtige Entscheidung
H_0 wird nicht verworfen	richtige Entscheidung	Fehler 2. Art

Als **Signifikanzniveau** α bezeichnet man den Wert, den die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art nicht überschreiten darf.

Einseitiger Signifikanztest

	Nullhypothese H_0	Gegenhypothese H_1	Ablehnungsbereich
linksseitiger Test	$p \geq p_0$	$p < p_0$	$\{0; 1; \ldots; g\}$
rechtsseitiger Test	$p \leq p_0$	$p > p_0$	$\{g; g+1; \ldots; n\}$

1 Zufallsexperimente und Pfadregeln

Unter Zufallsexperimenten versteht man Experimente, bei denen vor der Durchführung des Experimentes zwar bekannt ist, welche Ergebnisse prinzipiell möglich sind, aber der Ausgang des Experimentes nicht vorhersagbar ist und vom „Zufall“ abhängt.

Zufallsexperimente treten im täglichen Leben auf, da fast alle Geschehnisse mit einer gewissen Unsicherheit behaftet sind. Zufallsexperimente treten nicht nur bei Glücksspielen wie Lotto, Würfeln oder Roulette auf, sondern auch in der Medizin (Beurteilung von der Wirksamkeit von Medikamenten) oder bei Versicherungen (Wahrscheinlichkeit für den Eintritt eines Schadens).

Ein Zufallsexperiment kann einstufig oder mehrstufig sein.
Zufallsexperimente nennt man *einstufig*, wenn das Experiment nur einmal durchgeführt wird (z.B. es wird einmal gewürfelt, einmal eine Kugel aus einer Urne gezogen).

Häufig werden Zufallsexperimente jedoch mehrmals hintereinander durchgeführt (mehrmaliges Würfeln, mehrmaliges Drehen eines Glücksrades,…).
Dann spricht man von einem *mehrstufigen Zufallsexperiment.*

1.1 Begriffe Ergebnismenge, Ereignis, Gegenereignis

In der Stochastik tauchen spezielle Begriffe auf, die man zunächst verstehen muss.

Begriff Ergebnismenge:

Die Ergebnismenge wird häufig mit S abgekürzt.
Diese Menge enthält alle Ergebnisse, die bei einem Zufallsexperiment auftreten können.

Beispiele von Ergebnismengen für einstufige Zufallsexperimente:

Beispiel 1.1:

a) Man würfelt einmal mit einem Spielewürfel. Ergebnismenge: S = {1,2,3,4,5,6}.
b) Bei der Ziehung eines Loses in einer Tombola kann eine Niete oder ein Gewinn gezogen werden. Ergebnismenge: S = {Gewinn, Niete}.
c) Beim Werfen einer Münze kann Zahl oder Wappen fallen.
Ergebnismenge S = {Zahl, Wappen}.
d) Eine Urne enthalte rote, blaue und schwarze Kugeln. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Ergebnismenge: S = {blau, rot, schwarz}.

Jeder mögliche Ausgang des Experiments muss **eindeutig** einem Element aus der Ergebnismenge S zugeordnet werden können.
In Beispiel 1.1 c) wäre die Ergebnismenge S = {blau, rot, schwarz, nicht rot} falsch, da man beim Ziehen der schwarzen Kugel sowohl „schwarz“ als auch „nicht rot“ zuordnen könnte.

Bei mehrstufigen Zufallsexperimenten muss bei den möglichen Ergebnissen jeweils die Reihenfolge beachtet werden, in der die Ergebnisse jedes einzelnen Versuches nacheinander auftreten können.
Mathematisch korrekt müsste man hierzu die einzelnen Ergebnisse in eine runde Klammer schreiben.
Wenn man zweimal nacheinander würfelt, würde (2;6) bedeuten, man würfelt zunächst eine 2 und dann eine 6. Das Ergebnis (6;2) hingegen bedeutet, dass zunächst eine 6 und dann eine 2 gewürfelt wird.

Häufig lässt man die runden Klammern aber auch weg.
Wenn man zum Beispiel zweimal eine Münze wirft schreibt man für das Ergebnis „zweimal Wappen“ anstatt (W;W) häufig auch nur „WW“.

Beispiel 1.2:

a) Man wirft zweimal eine Münze mit den Seiten Z=Zahl und W = Wappen.
   Ergebnismenge S = { WW, WZ, ZW, ZZ }

b) Man zieht drei Kugeln aus einer Urne mit blauen und weißen Kugeln:
   Ergebnismenge S = { WWW, WWB, WBW, BWW, BBW, BWB, BBW, BBB } .

Begriff Ereignis:

Ein "Ereignis" ist eine Menge, in der nur bestimmte Ergebnisse der Ergebnismenge enthalten sind.

Beispiel 1.3:
Ein Würfel wird einmal geworfen mit der Ergebnismenge S = { 1, 2, 3, 4, 5, 6 }
Ereignis A: „Augenzahl ist gerade“ – in Mengenschreibweise A = {2, 4, 6}
Ereignis B: „Augenzahl ist kleiner als drei“ – in Mengenschreibweise B = {1, 2}
Ereignis C: „Augenzahl ist größer als sechs“ – in Mengenschreibweise C = { }
Ereignis D: „Es wird eine Primzahl gewürfelt“ – in Mengenschreibweise D = {2, 3, 5}

Man sagt, dass ein Ereignis "eingetreten" ist, wenn eine Zahl, die in der Ereignismenge enthalten ist, gewürfelt wird.
In Beispiel 1.3 würde gelten:
Wird die Augenzahl 2 gewürfelt, sind die Ereignisse A, B und D eingetreten.
Wird die Augenzahl 1 gewürfelt, ist das Ereignis B eingetreten.

Beispiel 1.4:
Eine Münze wird zweimal geworfen mit der Ergebnismenge S = { WW, WZ, ZW, ZZ }
Ereignis A: „mindestens einmal Wappen“ – in Mengenschreibweise A = { WW, WZ, ZW}
Ereignis B: „niemals Wappen“ – in Mengenschreibweise B = { ZZ }

Die **Ergebnismenge** S eines Zufallsexperiments ist die Menge, in der alle Ergebnisse aufgeführt sind, die bei dem Experiment eintreten können.

Ein **Ereignis** ist eine Menge, in der bestimmte Ergebnisse aus der Ergebnismenge S enthalten sind.

Endet die Durchführung des Zufallsexperiments mit einem Ergebnis, das in einem Ereignis A enthalten ist, so ist das Ereignis A **eingetreten**.

Begriff Gegenereignis:

Zu jedem Ereignis A gibt es ein Gegenereignis, das mit $\overline{A}$ bezeichnet wird.
Das Gegenereignis $\overline{A}$ ist eine Menge, in der alle Ergebnisse enthalten sind, die zwar in der Ergebnismenge S, aber nicht im Ereignis A enthalten sind.
Das Gegenereignis $\overline{A}$ beschreibt somit genau das Gegenteil von dem, was das Ereignis A beschreibt.

Beispiel 1.5:
Ein Würfel wird einmal geworfen.
Die Ergebnismenge ist S = {1,2, 3, 4, 5, 6}.

Ereignis A: "Augenzahl ist größer als 3" – in Mengenschreibweise A = {4, 5, 6}
Gegenereignis $\overline{A}$: "Augenzahl ist *kleiner oder gleich* 3", also $\overline{A} = \{1,2,3\}$

Ereignis B: "Augenzahl ist höchstens 4" – in Mengenschreibweise B = {1,2,3, 4}
Gegenereignis $\overline{B}$: „Augenzahl ist größer als 4", also $\overline{B} = \{5,6\}$

Ereignis C: "Augenzahl ist durch 3 teilbar", also C = {3, 6}
Gegenereignis $\overline{C}$: "Augenzahl ist nicht durch 3 teilbar", also $\overline{C} = \{1,2,4,5\}$

VORSICHT FALLE:

Bei der Formulierung eines Gegenereignisses passieren gerne Fehler, wenn Begriffe wie "mindestens" oder "höchstens" ins Spiel kommen.
Daher sollte man sich die Beispiele in der Tabelle klarmachen.

Zufallsexperiment: Drehen eines Glücksrades mit den Feldern 1 - 12.

Ereignis A	Gegenereignis $\overline{A}$
Feldzahl ist > 7 ("größer als 7")	Feldzahl ist ≤ 7 ("höchstens 7")
Feldzahl ist ≥ 7 ("mindestens 7")	Feldzahl ist < 7 ("kleiner als 7")
Feldzahl ist < 7 ("kleiner als 7")	Feldzahl ist ≥ 7 ("mindestens 7")
Feldzahl ist ≤ 7 ("höchstens 7")	Feldzahl ist > 7 ("größer als 7")

1.2 Relative Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit von Ereignissen

Das Ergebnis eines Zufallsexperiments können wir nicht sicher vorhersehen.
Man kann aber berechnen, wie wahrscheinlich es ist, dass ein bestimmtes Ereignis eintreten wird.
Diese Wahrscheinlichkeit hängt eng mit der relativen Häufigkeit zusammen.

Um die relative Häufigkeit eines Ergebnisses zu bestimmen, wird ein Zufallsexperiment mehrmals hintereinander ausgeführt und die einzelnen Ergebnisse notiert.

Beispiel 1.6:
Ein Würfel wird 500-mal geworfen und die Häufigkeit der einzelnen Ergebnisse werden notiert. In der folgenden Tabelle ist dargestellt, welche Augenzahlen mit welcher Häufigkeit aufgetreten sind:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Absolute Häufigkeit	80	86	78	84	90	82

Die 2. Zeile der Tabelle gibt die **absoluten Häufigkeiten** der Augenzahlen an.
Die absolute Häufigkeit eines Ergebnisses sagt aus, wie oft das einzelne Ereignis bei der mehrmaligen Ausführung des Zufallsexperiments aufgetreten ist.
Die Summe der absoluten Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse muss die Anzahl aller Versuche ergeben.

Die Information darüber, dass 80-mal die Augenzahl "1" gewürfelt wurde, ist alleine nicht viel wert, da in der Anzahl "80" nicht die Aussage enthalten ist, wie oft insgesamt gewürfelt wurde.

Um beurteilen zu können, ob man in einem Versuch nun besonders häufig bzw. besonders selten eine bestimmte Augenzahl gewürfelt hat, benötigt man die **relative Häufigkeit** der einzelnen Ergebnisse.

Die *relative Häufigkeit eines Ergebnisses* gibt das Verhältnis der absoluten Häufigkeit des Ergebnisses zu der Anzahl der Versuche an:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit des Ergebnisses}}{\text{Anzahl aller Versuche}}$$

Für die obigen Augenzahlen ergeben sich folgende relativen Häufigkeiten:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Relative Häufigkeit	$\frac{80}{500} = 16\%$	$\frac{86}{500} = 17{,}2\%$	$\frac{78}{500} = 15{,}6\%$	$\frac{84}{500} = 16{,}8\%$	$\frac{90}{500} = 18\%$	$\frac{82}{500} = 16{,}4\%$

Die unterschiedlichen relativen Häufigkeiten der einzelnen Augenzahlen liegen natürlich an der Zufälligkeit beim Würfeln. Wenn man nochmals 500-mal würfeln würde, kann es vorkommen, dass die Augenzahl "5" weniger auftritt und dafür die Augenzahl "1" häufiger.

Wenn man ein Experiment jedoch sehr häufig durchführt (zum Beispiel 6000mal Würfeln) und aufgrund der Symmetrie des Würfels keine bestimmte Augenzahl bevorzugt ist, würde man feststellen, dass sich die relativen Häufigkeiten zwischen den einzelnen Augenzahlen kaum noch unterscheiden.

Die relative Häufigkeit eines Ergebnisses ist keine stabile Größe, sondern immer abhängig vom konkret durchgeführten Experiment. Man kann also keine relative Häufigkeit eines Ergebnisses angeben, ohne das Experiment selbst durchgeführt zu haben.

Der Sachverhalt, dass die relativen Häufigkeiten der einzelnen Ergebnisse bei sehr häufiger Durchführung eines Experiments jeweils eine stabile Zahl ergeben, wird als ***Gesetz der großen Zahlen*** bezeichnet
Diese stabile Zahl wird dann als *Wahrscheinlichkeit* für das jeweilige Ergebnis festgelegt.

Um für bestimmte Zufallsexperimente die Wahrscheinlichkeit für ein konkretes Ergebnis zu erhalten, ist die Ermittlung einer relativen Häufigkeit bei einer hohen Versuchsanzahl erforderlich.

Um beispielsweise festzustellen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass eine zufällig ausgewählte Person ein Linkshänder ist, benötigt man die relative Häufigkeit für einen Linkshänder.
Wenn sich unter 2000 zufällig ausgewählten Personen 300 Linkshänder befinden, beträgt die relative Häufigkeit $\frac{300}{2000} = 0{,}15 = 15\%$.
Die Wahrscheinlichkeit für einen Linkshänder würde man dann mit 15% ansetzen.

Bei den meisten Experimenten, die in der Schule betrachtet werden, ist die Angabe solch einer relativen Häufigkeit jedoch nicht notwendig.

Bei vielen Zufallsexperimenten besitzt jedes einzelne Ergebnis der Ergebnismenge aus physikalischen und symmetrischen Eigenschaften dieselbe Eintrittswahrscheinlichkeit.

Beispiele:

- Werfen einer idealen Münze
- Würfeln mit einem idealen Würfel
- Drehen eines Glücksrades mit lauter gleich großen Feldern
- Ziehung einer bestimmten Kugel aus einer Urne mit lauter unterschiedlichen Kugeln

Solche Experimente nennt man *Laplace-Experimente.*

Unter einer "idealen Münze" oder einem "idealen Würfel" versteht man solche, die vollkommen symmetrisch sind (also nicht verbeult oder in irgendeiner Form bearbeitet sind). Dies hat zur Konsequenz, dass jede Münzseite bzw. Würfelseite dieselbe Chance besitzt, geworfen zu werden.

Wahrscheinlichkeitsberechnung bei Laplace-Experiment

Ein Zufallsexperiment ist ein Laplace-Experiment, wenn jedes Ergebnis dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt.

Wenn n verschiedene Ergebnisse möglich sind, ist die Eintrittswahrscheinlichkeit für jedes Ergebnis $\frac{1}{n}$.

Für die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis A eintritt, gilt die Wahrscheinlichkeitsformel:

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Elemente in A}}{\text{Anzahl der Elemente in S}} = \frac{\text{Zahl der für A günstigen Fälle}}{\text{Zahl aller möglichen Fälle}}$$

Beispiel 1.6:

a) Würfeln mit einem idealen Würfel mit Ergebnismenge S = {1,2,3,4,5,6}

Jedes einzelne Würfelergebnis besitzt die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$

Das Ereignis A: "Würfeln einer geraden Augenzahl" mit A = {2,4,6} besitzt die Wahrscheinlichkeit $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

b) Einmaliges Drehen eines Glücksrades, das in 5 gleich große Felder aufgeteilt ist, die mit den Zahlen 1 - 5 durchnummeriert sind; die Ergebnismenge lautet S = {1, 2, 3, 4, 5}

Die Eintrittswahrscheinlichkeit für jedes Feld beträgt $\frac{1}{5}$.

Das Ereignis B: "Drehen einer Zahl größer als 3" mit B = {4,5} besitzt die Wahrscheinlichkeit $P(B) = \frac{2}{5}$

c) Eine Urne enthält 20 Kugeln mit den Nummern 1 - 20. Aus der Urne wird eine Kugel gezogen. Die Ergebnismenge lautet S = {1,2,...,20}.

Die Wahrscheinlichkeit eine Kugel mit einer bestimmten Nummer zu ziehen beträgt $\frac{1}{20}$.

Das Ereignis C: "Ziehen einer Kugel mit einer zweistelligen Zahl" mit C = {11,...,20} besitzt die Wahrscheinlichkeit $P(C) = \frac{11}{20}$

Für Wahrscheinlichkeiten gelten die folgenden Gesetzmäßigkeiten:

Für jedes Ereignis A gilt $0 \le P(A) \le 1$
Gilt P(A) = 0, dann tritt das Ereignis nie ein („unmögliches Ereignis“)
Gilt P(A) = 1, dann tritt das Ereignis immer ein („sicheres Ereignis“)

Beispiel 1.7:

a) Aus dem Wort SCHAUFENSTERSCHEIBE wird zufällig ein Buchstabe ausgewählt. Das Wort besteht aus 19 Buchstaben.

Wahrscheinlichkeit für ein „S“: $P(\text{"S"}) = \frac{3}{19}$ (3 der 19 Buchstaben sind günstig)

Wahrscheinlichkeit für ein „E“: $P(\text{"E"}) = \frac{4}{19}$ (4 der 19 Buchstaben sind günstig)

Wahrscheinlichkeit für kein "E": P("kein E") = $\frac{15}{19}$ (15 der 19 Buchstaben sind günstig)

b) Eine Lostrommel enthält 400 Lose, 360 davon sind Nieten. Es wird ein Los gezogen.

P(Ziehung einer Niete) = $\frac{360}{400} = \frac{9}{10}$ P(Ziehung eines Gewinns) = $\frac{40}{400} = \frac{1}{10}$

c) Eine Urne enthält 5 rote, 3 blaue und 2 weiße Kugeln. Es wird 1 Kugel gezogen.

P(Kugel ist rot) = $\frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ P(Kugel ist blau) = $\frac{3}{10}$

P(Kugel ist weiß) = $\frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ P(Kugel ist nicht weiß) = $\frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

d) Ein Glücksrad besteht aus zwei Feldern: Ein rotes Feld mit Mittelpunktswinkel 210° und ein grünes Feld mit Mittelpunktswinkel 150°.

P(Glücksrad bleibt auf rotem Feld stehen) = $\frac{210°}{360°} = \frac{7}{12}$

(es stehen insgesamt 360° zur Verfügung, 210° davon sind günstig)

P(Glücksrad bleibt auf grünem Feld stehen) = $\frac{150°}{360°} = \frac{5}{12}$

Wenn man solche physikalischen Gesetzmäßigkeiten nicht mehr voraussetzen kann, benötigt man wie bereits erwähnt relative Häufigkeiten, um daraus die Wahrscheinlichkeiten berechnen zu können.

Beispiel 1.8:

a) Bei einer Schraubenproduktion beträgt der Ausschuss 2%, das heißt 2% aller Schrauben sind defekt. Also gilt: P(eine gezogene Schraube ist in Ordnung) = $\frac{98}{100}$

b) In der Oberstufe eines Gymnasiums sind 100 Schüler, davon sind 40 Schüler 17 Jahre alt und 60 Schüler sind 18 Jahre alt.

Also gilt: P(ein ausgewählter Schüler ist 17 Jahre alt) = $\frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

1.3 Baumdiagramme und Pfadregeln

Im Kapitel 1.2 wurde behandelt, wie man die Wahrscheinlichkeit eines einstufigen Zufallsexperiments berechnen kann.

Um Wahrscheinlichkeiten von mehrstufige Zufallsexperimenten zu berechnen, benötigt man ein Baumdiagramm.

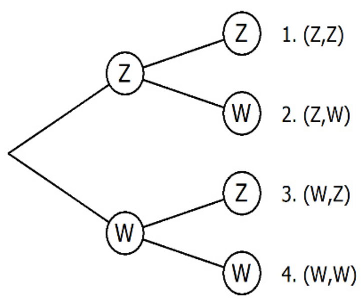
In einem Baumdiagramm können alle Ergebnisse eines mehrstufigen Zufallsexperiments veranschaulicht werden. Jedes einzelne Ergebnis wird durch einen Weg (=Pfad) in dem Baumdiagramm symbolisiert.

Die Baumdiagramme in dem Buch werden von links nach rechts gezeichnet.
Es besteht auch die Möglichkeit, das Baumdiagramm von oben nach unten zu zeichnen.

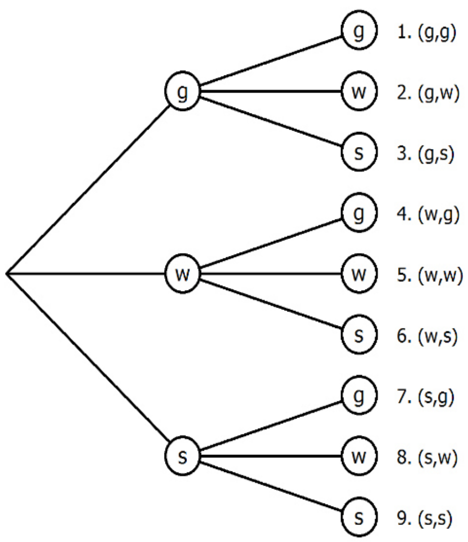
Beispiel 1.9:

a) Eine Münze mit den Seiten Z(ahl) und W(appen) wird zweimal hintereinander geworfen. Die Ergebnisse können durch folgendes Baumdiagramm veranschaulicht werden.

Links ist der Startpunkt des Baumdiagramms. Es gibt 4 verschiedene Pfade, die man von links nach rechts durchlaufen kann.
Diese 4 Pfade sind ZZ bzw. ZW bzw. WZ bzw. WW.
Dies sind gleichzeitig die Elemente der Ergebnismenge S = { WW, WZ, ZW, ZZ }



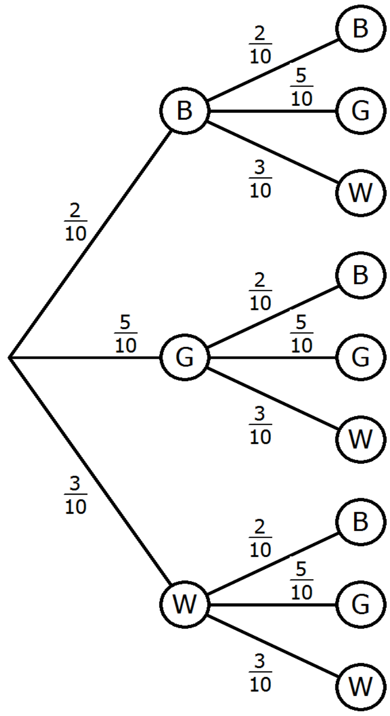
b) Eine Urne enthält gelbe, schwarze und weiße Kugeln. Es werden zwei Kugeln gezogen. Links ist der Startpunkt des Baumdiagramms. Es gibt 9 verschiedene Pfade, die man von links nach rechts durchlaufen kann.
Diese Pfade sind die Elemente der Ergebnismenge
S = {gg, gw, gs, wg, ww, ws, sg, sw, ss}



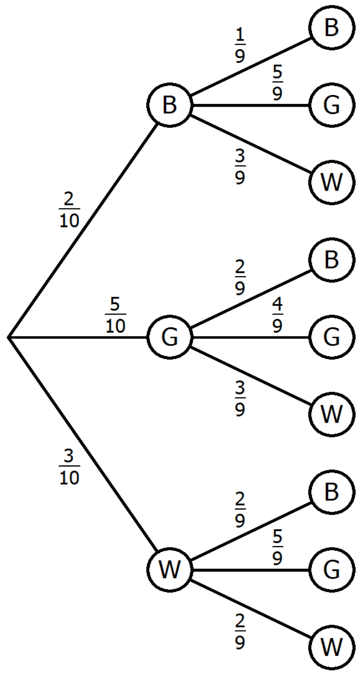
Um mit Baumdiagrammen Wahrscheinlichkeiten zu berechnen, werden an die einzelnen Äste Wahrscheinlichkeiten notiert, mit der man das jeweilige Ergebnis am Ende eines Astes erhält.

Beispiel 1.10:
Aus einer Urne mit 2 blauen, 5 grünen und 3 weißen Kugeln werden nacheinander zwei Kugeln gezogen.

Ziehung **mit Zurücklegen**



Ziehung **ohne Zurücklegen**



Erklärung des ersten Pfades im linken Baumdiagramm:
Zu Beginn sind 2 von 10 Kugeln blau, also beträgt die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine blaue Kugel zu ziehen $\frac{2}{10}$. Da die blaue Kugel nach der Ziehung wieder zurückgelegt wird, bleibt die Wahrscheinlichkeiten für den zweiten Zug gleich.

Erklärung des ersten Pfades im rechten Baumdiagramm:
Zu Beginn sind 2 von 10 Kugeln blau, also beträgt die Wahrscheinlichkeit, beim ersten Zug eine blaue Kugel zu ziehen $\frac{2}{10}$. Da die blaue Kugel nach der Ziehung nicht zurückgelegt wird, sind nur noch 9 Kugeln in der Urne, davon ist 1 Kugel blau.
Die Wahrscheinlichkeit für eine weitere blaue Kugel beträgt daher $\frac{1}{9}$.

Man kann schnell kontrollieren, ob man die Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen richtig berechnet hat: Die Summe der Wahrscheinlichkeiten von allen Ästen, die von einem Verzweigungspunkt ausgehen, ergibt immer 1.

Um nun die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass man ein bestimmtes Pfadergebnis erhält (z.B. blau – blau), benötigt man die 1.Pfadregel:

1.Pfadregel (Pfadmultiplikationsregel)
In einem Baumdiagramm berechnet sich die Wahrscheinlichkeit eines Ergebnisses als *Produkt der Wahrscheinlichkeiten* auf dem Pfad, der zu diesem Ergebnis führt.

Beispiel 1.11:
Zu den Baumdiagrammen in Beispiel 1.10 gilt gemäß der 1.Pfadregel:

Ergebnis	Linker Baum (mit Zurücklegen)	Rechter Baum (ohne Zurücklegen)
bb	P(bb) = $\frac{2}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{25}$	P(bb) = $\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{45}$
gb	P(gb) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{10}=\frac{1}{10}$	P(gb) = $\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$
wg	P(wg) = $\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{10}=\frac{3}{20}$	P(wg) $=\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{1}{6}$

Um jetzt noch die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen berechnen zu können, die aus mehreren Pfaden bestehen (z.B. die Frage, dass zwei gleichfarbige Kugeln gezogen werden), benötigt man die 2.Pfadregel:

2.Pfadregel (Pfadadditionsregel)
Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist gleich der *Summe der Wahrscheinlichkeiten* der einzelnen Pfade, die zu diesem Ereignis gehören.

Beispiel 1.12:
Für das rechte Baumdiagramm in Beispiel 1.10 (Ziehen ohne Zurücklegen) gilt:

P(„zwei gleichfarbige Kugeln“) = P(bb, gg, ww) = P(bb) + P(gg) + P(ww)
$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{14}{45}$$

P(„genau eine Kugel ist weiß“) = P(bw, gw, wb, wg) = P(bw) + P(gw) + P(wb) + P(wg)
$$=\frac{2}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{5}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{5}{9}=\frac{7}{15}$$

VORSICHT FALLE:

Wie man sieht, kommt es bei Baumdiagrammen immer auf die Reihenfolge an, mit der die einzelnen Ergebnisse eintreten. Spielt es bei einer Fragestellung keine Rolle, in welcher Reihenfolge ein Ergebnis entsteht (z.B. bei der Wahrscheinlichkeit, genau eine weiße Kugel zu ziehen) muss man in dem Baumdiagramm sämtliche Pfade berücksichtigen, die diese Eigenschaft haben.

Falls in einer Aufgabenstellung beschrieben ist, dass bei einem Zufallsexperiment zwei Kugeln nicht nacheinander, sondern **gleichzeitig** aus einer Urne gezogen werden, kann man das gleichzeitige Werfen auch so interpretieren, als ob die Kugeln nacheinander ohne Zurücklegen gezogen werden.

In Kapitel 1.1 wurde der Begriff des Gegenereignisses $\overline{A}$ zu einem Ereignis A eingeführt.

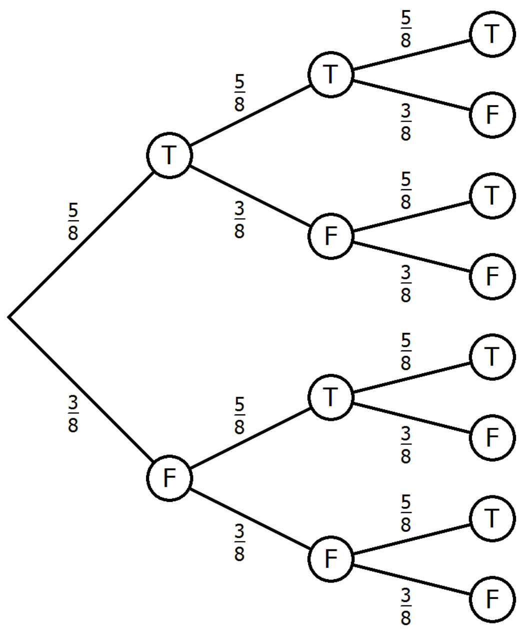
Für die Wahrscheinlichkeit von Gegenereignissen gibt es eine spezielle Formel:

Bei einem Zufallsexperiment sei A ein beliebiges Ereignis mit dem Gegenereignis $\overline{A}$.
Es gilt folgende Formel: $P(A) = 1 - P(\overline{A})$

Die Formel zum Gegenereignis ist dann hilfreich, wenn die direkte Berechnung von P(A) zu aufwändig ist und die Berechnung von $P(\overline{A})$ einfacher ist.
Dies sieht man an folgendem Beispiel bei b) und c):

Beispiel 1.13:

Ein Elfmeterschütze schießt 3-mal auf ein Tor.
Die Erfahrungen haben gezeigt, dass er in fünf von acht Fällen trifft.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass genau ein Treffer erzielt wird.
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Treffer erzielt wird.
c) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens zwei Treffer erzielt werden.



a) P(genau ein Treffer) = P(TFF) + P(FTF) + P(FFT) = $\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{8}+\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{135}{512}$

b) P(mindestens ein Treffer) = 1 – P(kein Treffer) = $1-\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}=\frac{485}{512}$

c) P(höchstens zwei Treffer) = 1 – P(drei Treffer) = $1-\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}\cdot\frac{5}{8}=\frac{387}{512}$

Wenn man b) und c) nicht über das Gegenereignis berechnen würde, hätte man einen viel höheren Rechenaufwand.
„mindestens ein Treffer" wären alle Pfade bis auf „FFF".
„höchstens zwei Treffer" wären alle Pfade bis auf „TTT".

Um sowohl beim Zeichnen von Baumdiagrammen als auch bei der Berechnung der Pfadwahrscheinlichkeiten Zeit zu sparen, gibt es zwei Tipps:

Tipps für das Zeichnen von Baumdiagrammen:

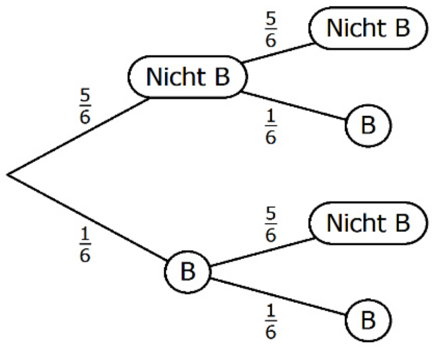
1.) Skizziere in dem Baumdiagramm nur die Pfade des Baumdiagramm, die für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit wirklich relevant sind.

2.) Fasse abhängig von der Aufgabenstellung einzelne Ergebnisse des Experiments so weit wie möglich in Gruppen zusammen.

Beispiel 1.14:
Ein Glücksrad besteht aus 3 Feldern mit den Bezeichnungen A, B und C.
Feld A besitzt einen Mittelpunktswinkel von 90°, Feld B einen Mittelpunktwinkel von 60° und Feld C einen Mittelpunktswinkel von 210°. Das Glücksrad wird zweimal gedreht.
Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einmal B gedreht wird.

Die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Felder können anhand der Mittelpunktswinkel bestimmt werden. Insgesamt stehen 360° zur Verfügung.
Damit gilt: $P(A)=\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$, $P(B)=\frac{60}{360}=\frac{1}{6}$ und $P(C)=\frac{210}{360}=\frac{7}{12}$.

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens einmal B gedreht wird. Auch wenn insgesamt 3 Ergebnisse A, B und C möglich sind, genügt es, wenn wir bei dem Baumdiagramm nur danach unterscheiden, ob B gedreht wird oder "Nicht B".
Würden wir ausführlich in A, B und C unterscheiden würde das Baumdiagramm unnötig kompliziert (Tipp 2).
Es gilt P(Nicht B) = $\frac{1}{4}+\frac{7}{12}=\frac{5}{6}$.



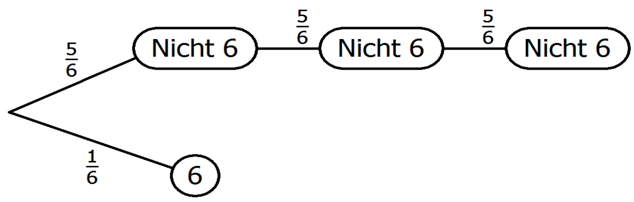
P(höchstens einmal B) = P(B,Nicht B) + P(Nicht B, Nicht B) + P(Nicht B, B)

$$=\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{36}$$

oder mit dem Gegenereignis: P(höchstens einmal B) = 1 - P(BB) = $1-\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{35}{36}$

Beispiel 1.15:
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei 3-maligem Werfen mit einem idealen Würfel mindestens eine „6“ zu werfen.

Da es bei dieser Fragestellung nur darauf ankommt, zwischen „6“ und „Nicht 6“ zu unterscheiden, genügen bei dem Baumdiagramm zwei Äste (Tipp 2).



Aufgrund der Fragestellung müsste man alle Pfade betrachten, in denen mindestens einmal „6“ auftritt. Da es sich hierbei um sehr viele Pfade handelt, geht man zum Gegenereignis über. Das Gegenereignis von „mindestens eine 6“ ist „keine 6“.
Das Gegenereignis lässt sich durch einen einzigen Pfad darstellen, der aus lauter „Nicht 6“ besteht.
Im Baumdiagramm zeichnet man daher auch nur den Pfad ein, der von Interesse ist (Tipp 1).

P(„mindestens eine 6“) = 1 – P(„keine 6“) = $1-\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}$

Hinweis:
Bei der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten sollte man immer dann zum Gegenereignis wechseln, wenn das Ereignis selbst im Baumdiagramm aus sehr vielen Pfaden besteht, das Gegenereignis jedoch aus deutlich weniger Pfaden. Taucht in der Aufgabenstellung der Begriff "*mindestens einmal*" auf, ist die Nutzung des Gegenereignisses empfehlenswert.

Übungsaufgaben zu Kapitel 1

Aufgabe 1-1:
Ein Kasten enthält neun Kugeln mit den Zahlen 1 bis 9. Eine Kugel wird gezogen und die Zahl notiert.
Betrachtet werden die folgenden Ereignisse:

A: Die Zahl ist eine Primzahl
B: Die Zahl ist durch 5 teilbar
C: Die Zahl ist gerade
D: Die Zahl ist größer als 8
E: Die Zahl ist kleiner oder gleich 5
F: Die Zahl ist eine Quadratzahl

a) Gib die Ereignisse in Mengenschreibweise an. Welcher der angegebenen Ereignisse sind eingetreten, wenn die Kugel mit der Zahl 4 gezogen wurde?
b) Beschreibe die Gegenereignisse von A bis F in Worten und in Mengenschreibweise.

Aufgabe 1-2:
Bei einer Umfrage wurden 2000 Erwachsene zum täglichen Fernsehkonsum befragt mit folgendem Ergebnis:

Tageskonsum	Bis 1 Stunde	2 Stunden	3 Stunden	4 Stunden	über 4 Std.
Relative Häufigkeit	10%	20%	30%	25%	15%

a) Warum können die relativen Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeit interpretiert werden?
b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass
   A: eine zufällig ausgewählte Person mindestens 3 Stunden fernsieht
   B: eine zufällig ausgewählte Person höchstens 4 Stunden fernsieht?

Aufgabe 1-3:
Bei einer Klassenarbeit wurden folgende Noten geschrieben:

Note	1	2	3	4	5	6
Häufigkeit	3	6	8	9	4	2

a) Bestimme die relative Häufigkeit des Ereignisses A: "Die Note ist schlechter als 4."
b) Bestimme die relative Häufigkeit des Ereignisses B: "Die Note ist 2 oder besser."
c) Beschreibe $\overline{A}$ und $\overline{B}$ und bestimme die relativen Häufigkeiten der Ereignisse.

Aufgabe 1-4: WTR, MH
In einer Urne befinden sich 15 Kugeln. Diese sind nummeriert von 1 bis 15. Er wird zufällig eine Kugel entnommen.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse?
A: "Die gezogene Zahl ist eine Primzahl."
B: "Die gezogene Zahl ist durch drei teilbar."
C: "Die gezogene Zahl ist weder eine Primzahl noch durch drei teilbar."

Aufgabe 1-5: WTR, MH
Mit einem idealen Würfel wird zweimal gewürfelt.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine 6 fällt?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augenzahl beim zweiten Wurf um 1 größer als beim ersten?

Aufgabe 1-6: WTR, MH
Ein Gefäß enthält 8 rote, 4 blaue und 2 weiße Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man keine rote Kugel?
b) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass man höchstens eine rote Kugel erhält.

Aufgabe 1-7: WTR, MH
In einem Behälter befinden sich 3 rote und 5 gelbe Kugeln. Es werden 2 Kugeln mit Zurücklegen gezogen.
a) Berechne die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine der beiden Kugeln gelb ist.
b) Zeichne ein Baumdiagramm, wenn im Behälter 3 rote und eine unbekannte Anzahl gelber Kugeln vorhanden sind und zwei Kugeln mit Zurücklegen gezogen werden.

Aufgabe 1-8: WTR, MH
Aus einem Kartenspiel werden vier Könige, drei Damen und zwei Buben genommen und verdeckt auf einen Tisch gelegt. Max dreht zwei zufällig gewählte Karten um und lässt sie aufgedeckt liegen.
Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: Es liegt kein Bube aufgedeckt auf dem Tisch.
B: Eine Dame und ein König liegen aufgedeckt auf dem Tisch.

Aufgabe 1-9: WTR, MH
In einer Urne sind 7 weiße, 5 schwarze und 3 rote Kugeln. Es werden 3 Kugeln gleichzeitig gezogen.
a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Kugel weiß ist und zwei Kugeln schwarz sind?
b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist mindestens eine Kugel weiß?

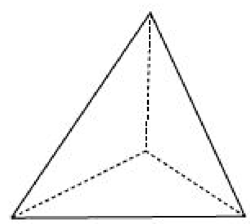
Aufgabe 1-10: WTR, MH
In einer Urne sind 4 weiße und noch eine unbekannte Anzahl roter Kugeln. Es werden 2 Kugeln ohne Zurücklegen gezogen.
Wie viele rote Kugeln waren vorhanden, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass beide Kugeln weiß sind, $\frac{1}{6}$ beträgt?

Aufgabe 1-11: WTR, MH
Eine Urne enthalte 5 blaue Kugeln und 1 gelbe Kugel. Für das Spiel „Ziehen und Ersetzen“ wird folgende Regel vereinbart: Es wird jeweils genau eine Kugel gezogen. Ist die gezogene Kugel gelb, so wird sie in die Urne zurückgelegt, ist sie dagegen blau, wird sie beiseitegelegt und in der Urne durch eine gelbe Kugel ersetzt.
Das Spiel „Ziehen und Ersetzen“ wird dreimal durchgeführt und jeweils die Farbe der gezogenen Kugel festgestellt. Berechne die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:
A: „Genau eine der gezogenen Kugeln ist gelb.“
B: „Nur die dritte Kugel ist blau.“
C: „Die zweite Kugel ist gelb.“

Aufgabe 1-12: WTR, MH
In einer Schachtel sind vier Tennisbälle, drei davon sind gelb und einer ist weiß.
Hannah und Rouven einigen sich auf folgendes Spiel:
Sie ziehen ohne Zurücklegen abwechselnd jeweils einen Ball aus der Schachtel.
Wer zuerst den weißen Ball zieht, hat gewonnen.
Ist es für Hannah vorteilhaft, den ersten Zug zu machen?

Aufgabe 1-13: WTR, MH

Die Flächen eines Tetraeders sind mit den Zahlen 1 bis 4 beschriftet.
Als gewürfelt gilt die Zahl, auf der Würfel zum Liegen kommt.
Der Würfel wird dreimal geworfen.



a) Berechne die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dreimal die gleiche Zahl gewürfelt wird.

b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Summe der Zahlen 5 ergibt.