Lineare Optimierung
Lehrbuch mit Aufgaben und Lösungen

Dipl.-Math. Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: **www.mathe-aufgaben.com**

Einige Hinweise

Bis zum Jahr 2016 war das Thema "Lineare Optimierung" ein Teil der Abiturprüfung in Baden-Württemberg.
Zur Vorbereitung auf diese Abiturprüfungen entstand diese Ausarbeitung.

Dieses Lehrbuch inklusive 12 umfangreichen Übungsaufgaben sowie ausführlicher Musterlösungen ist für Schüler geeignet, bei denen dieses Thema noch abiturrelevant ist

Für Studenten, die sich zum Beispiel im Rahmen ihres Studiums mit linearer Optimierung beschäftigen ist diese Ausarbeitung sicher ein guter Einstieg.

Ich habe mir daher zum Ziel gesetzt, alles so verständlich wie möglich darzustellen und auf „fachchinesisch" zu verzichten (gemäß Albert Einstein: „Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher").

Wichtige Textpassagen werden durch graue Unterlegungen gekennzeichnet. .

Eure Ergebnisse aus den Übungsaufgaben könnt ihr mit den Musterlösungen vergleichen. Natürlich sind meine Musterlösungen nicht immer der einzige Weg zum Ziel. Solltet ihr also einen anderen Lösungsweg mit demselben Ergebnis haben, kann dies genauso richtig sein.

Noch ein Hinweis zum Taschenrechner:
Für die Lösung der Übungsaufgaben habe ich unterstellt, dass ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) vorhanden ist.
Natürlich können die Aufgaben auch mit einem normalen Taschenrechner oder per Hand gelöst werden, die Rechenwege sind dann etwas länger.

Viele Rückmeldungen von Abiturienten sagen aus, dass ihnen mit dieser Ausarbeitung ein besonders gut geeignetes Arbeitsmittel zur Prüfungsvorbereitung an die Hand gegeben wurde. Aber trotz aller Mühen, Tipp – und Flüchtigkeitsfehler zu vermeiden, können auch mir Fehler unterlaufen sein. Solltet ihr welche entdecken, wäre ich für eine Mitteilung dankbar. Auch Anregungen und konstruktive Kritik werden von mir gerne entgegengenommen und bei der Aktualisierung berücksichtigt.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung des Themas !

Alexander Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1. Grafische lineare Optimierung

Ein Optimierungsproblem – das man gegebenenfalls schon aus der Analysis kennt – liegt dann vor, wenn eine bestimmte Größe, die von einer oder mehreren Variablen abhängt, maximal oder minimal werden soll. Die Formel, mit der diese Größe berechnet wird, nennt man **Zielfunktion**.

Bei linearen Optimierungsaufgaben ist die Zielfunktion ein linearer Term mit mehreren Variablen.

Beispiel 1:
Eine Papierfabrik produziert zwei verschiedene Sorten von Papier.
1 Packung mit hochwertigem Papier ergeben einen Gewinn von 10 Euro,
1 Packung des normalen Papiers ergeben einen Gewinn von 7 Euro für das Unternehmen.
Das Unternehmen möchte einen möglichst hohen Gewinn machen.

Stellt das Unternehmen nun x Packungen hochwertiges Papier und y Packungen normales Papier her, hat es einen Gesamtgewinn von $G = 10x + 7y$. Dies ist gleichzeitig die (lineare) Zielfunktion, da der Gewinn G maximiert werden soll.

Im Beispiel 1 kann man dem Unternehmen nur den Ratschlag geben, möglichst viel zu produzieren, da jede zusätzliche Produktion zu einem höheren Gewinn führt.
Je größer die Variablen x und y gewählt werden, desto größer ist der Gewinn.

In der Praxis gibt es solche unbegrenzte Möglichkeiten der Produktion jedoch nicht.
Die Produktion eines Unternehmens wird begrenzt durch zeitliche Komponenten (eine Maschine kann maximal 24 Stunden am Tag laufen und nur eine endliche Menge eines Produkts erzeugen), durch Marktkomponenten (man kann nicht beliebig viele Einheiten eines Produktes an die Verbraucher verkaufen) oder durch Kostenkomponenten (die Produktion soll eine bestimmte Kostengrenze nicht überschreiten).

Aus diesen Gründen gibt es bei linearen Optimierungsaufgaben neben der zu maximierenden oder minimierenden Zielfunktionsgröße noch so genannte **Nebenbedingungen**, die durch ein System von linearen Ungleichungen dargestellt werden. Dieses Ungleichungssystem führt dazu, dass man für die Variablen in der Zielfunktion nicht mehr beliebige Kombinationen, sondern nur noch Zahlenkombinationen einsetzen darf, die bestimmte Bedingungen erfüllen.

Dies soll an folgendem Beispiel dargestellt werden:

Beispiel 2: Maximierungsproblem
Ein Landwirtschaftsbetrieb besitzt 90 Ar Land für den Anbau von zwei Gemüsesorten A und B. Das Saatgut A kostet pro Ar 10 € und Sorte B kostet 5€ pro Ar. Maximal möchte der Betrieb für das Saatgut 800 € ausgeben. Um das Gemüse anzubauen, benötigt der Betrieb für die Sorte A durchschnittlich 3 Stunden pro Ar, für die Sorte B 6 Stunden pro Ar, wobei der Betrieb maximal 420 Stunden aufwenden kann.
Wie viel Ar von jeder Sorte sollte der Betrieb anbauen, wenn der Gewinn für Sorte A 36 € pro Ar und für Sorte B 45 € pro Ar beträgt, um einen möglichst großen Gesamtgewinn zu erzielen ?

Im ersten Schritt sollte man sich überlegen, welche Variable eingeführt werden müssen und was diese bedeuten.
In dieser Aufgabe sei
x = Fläche in Ar, die mit Sorte A angebaut wird
y = Fläche in Ar, die mit Sorte B angebaut wird

Die zu maximierende Zielfunktion, die den Gewinn angibt, lautet: $Z = 36x + 45y$

Welche Einschränkungen müssen für die Werte der Variablen x und y gemacht werden ?

Zunächst einmal gilt – wie meist bei linearen Optimierungsproblemen – die **Nichtnegativitätsbedingung** $x \geq 0$, $y \geq 0$ (negative Flächenwerte sind nicht sinnvoll)

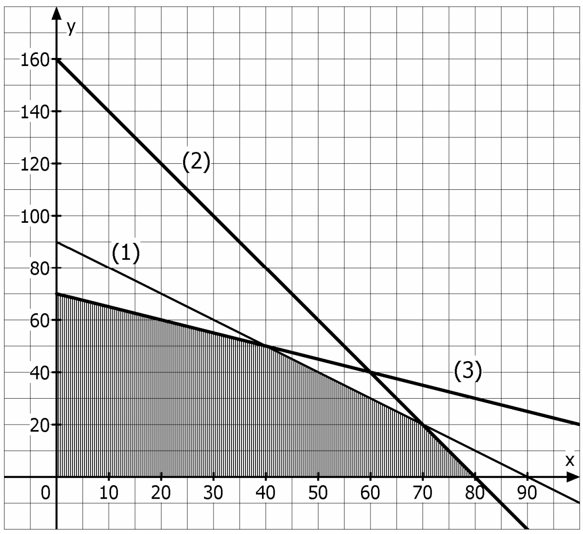
Aus dem Aufgabentext ergeben sich weitere Einschränkungen:

$x + y \leq 90$ (Flächenbegrenzung)
$10x + 5y \leq 800$ (Kostenbegrenzung)
$3x + 6y \leq 420$ (Zeitbegrenzung)

Gesucht sind nun Werte für x und y, die den Gewinn Z der oben dargestellte Zielfunktion maximieren und gleichzeitig die drei Ungleichungen erfüllen.

Das ganze lässt sich grafisch lösen, indem man im ersten Schritt die Ungleichungen nach y auflöst und die Ungleichungen dann als Flächen in ein Koordinatensystem einzeichnet:

Wegen $x \geq 0$, $y \geq 0$ genügt es, nur den positiven Teil der x- und y-Achse zu zeichnen.
$x + y \leq 90 \Rightarrow y \leq -x + 90$ (Fläche unterhalb der Geraden y = -x + 90 (1))
$10x + 5y \leq 800 \Rightarrow y \leq -2x + 160$ (Fläche unterhalb der Geraden y = -2x + 160 (2))
$3x + 6y \leq 420 \Rightarrow y \leq -0{,}5x + 70$ (Fläche unterhalb der Geraden y = -0,5x + 70 (3))



Das Ungleichungssystem entspricht anschaulich der Fläche, die sich unterhalb der jeweiligen Geraden befindet. Die Schnittmenge dieser 3 Flächen (also die Punktmenge, für die alle drei Ungleichungen gelten) ergibt die schraffierte Fläche.

Die schraffierte Fläche, die hier ein Fünfeck darstellt, nennt man auch **Planungsbereich.**. Gesucht ist nun ein Punkt (x/y), der sich innerhalb bzw. am Rand der Fläche befindet, für den die Zielfunktion $Z = 36x + 45y$ maximal wird.

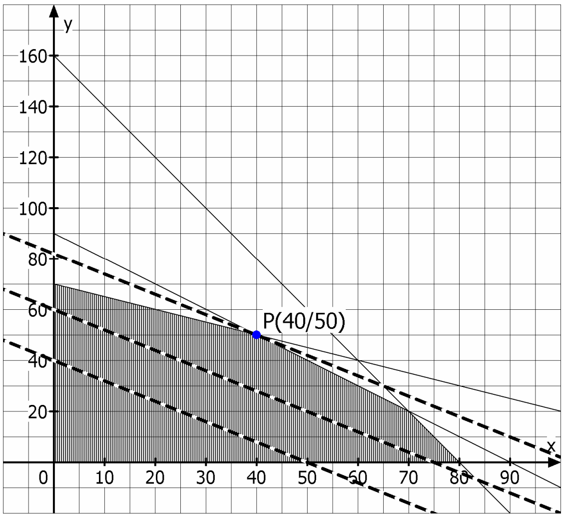
Ein Punkt im Innern der Fläche kommt hierfür nicht in Frage. Denn wenn man einen Punkt im Innern wählen würde, könnte man den Punkt entweder noch weiter nach rechts schieben (das heißt der x-Wert erhöht sich) oder weiter nach oben schieben (der y-Wert erhöht sich), so dass die Zielfunktion einen größeren Wert annehmen kann.

Wie bekommt man nun den optimalen Punkt ?

Hierzu muss man auch die Zielfunktion nach y auflösen und als Geradengleichung interpretieren:

$$Z = 36x + 45y \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{Z}{45}$$

Da die Größe Z (und damit auch der von Z abhängige y-Achsenabschnitt der Gerade) möglichst groß werden soll, zeichnet man nun in das obige Koordinatensystem eine Gerade mit der Steigung $m = -\frac{4}{5}$ so ein, dass die Gerade einen Punkt des Planungsbereiches enthält und deren y-Achsenabschnitt möglichst weit oben ist.



Die schraffierten Geraden geben jeweils Geraden mit Steigung $m = -\frac{4}{5}$ an.

Die oberste Gerade hat mit dem Planungsbereich den Punkt P(40/50) gemeinsam.

Falls der Punkt P(40/50) aus dem Koordinatensystem nicht abgelesen werden kann, müssen die Schnittpunkte der entsprechenden Geradengleichungen ermittelt werden (entweder durch Gleichsetzen oder mit dem GTR).

Würde man diese Gerade noch weiter nach oben verschieben, hätte sie keinen gemeinsamen Punkt mehr mit dem Planungsbereich. Somit ist diese Gerade die optimal (mit dem maximalen y-Achsenabschnitt).

Das bedeutet, dass die Zielfunktion Z für x = 40 und y = 50 maximal wird mit
$Z = 36 \cdot 40 + 45 \cdot 50 = 3690$

Vorgehen bei grafischer Lösung linearer Optimierungsprobleme:

1.) Führe Variablen x und y für die gesuchten Größen ein (mehr als 2 Variablen kommen für eine grafische Lösung nicht in Frage)

2.) Bestimme für die zu maximierende/minimierende Größe Z einen von den Variablen x und y abhängigen (linearen) Term, die so genannte Zielfunktion.
Löse die Zielfunktion nach y auf.

3.) Bestimme anhand der Aufgabe ein Ungleichungssystem und löse die einzelnen Ungleichungen jeweils nach y auf.

4.) Bestimme zeichnerisch den Planungsbereich durch das Einzeichnen der Flächen unterhalb/oberhalb der Geradengleichungen, die sich aus 3.) ergeben.

5.) Die in 2.) ermittelte Gerade mit einer konstanten Steigung wird so in das Koordinatensystem eingezeichnet, dass es einen gemeinsamen Punkt mit dem Planungsbereich besitzt und einen möglichst großen y-Achsenabschnitt (bei Maximierungsproblem) bzw. einen möglichst kleinen y-Achsenabschnitt (bei Minimierungsproblem) liefert. Der gemeinsame Punkt der Gerade mit dem Planungsbereich ist der optimale Punkt (x/y).
6.) Einsetzen der optimalen Punktkoordinaten in die Zielfunktion liefert den maximalen bzw. minimalen Wert für Z.

Allgemein gilt:
Der **optimale Punkt**, für den eine lineare Zielfunktion maximal bzw. minimal wird, liegt am **Rand** des Planungsbereiches.

(...)

4. Übungsaufgaben

Aufgabe 1:
Bei einer Party von Steffi, Verena und Kerstin wollen sie Bowle anbieten, die aus den Mischgetränken Pfirsichmix und Himbeertraum hergestellt wird. Sie rechnen mit einem Mindestverbrauch von 35 Liter, wobei sie noch 15 Liter Pfirsichmix haben, die verbraucht werden sollen. Wegen des Geschmacks sollte von der Sorte Himbeertraum mindestens so viel wie von der Sorte Pfirsichmix enthalten sein. Wenn der Anteil von Himbeertraum allerdings mehr als doppelt so hoch wie Pfirsichmix ist, wird das Getränk ungenießbar.
Für einen Liter Pfirsichmix müssen sie 0,60 € und für einen Liter Himbeertraum 0,75 € zahlen.
Bestimme grafisch, wie viel von welcher Sorte sie für die Bowle benötigen, um möglichst günstig ihre Party zu feiern ?

(...)

5. Musterlösungen

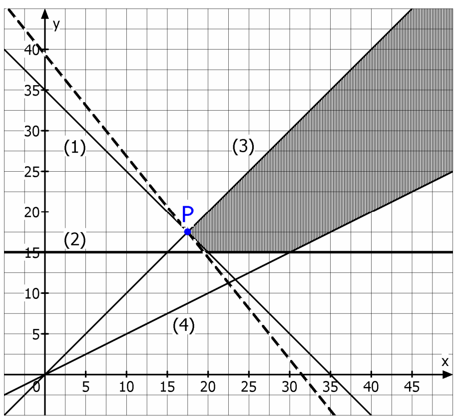
Aufgabe 1:
Es sei x = Menge Himbeertraum in Liter und y = Menge Pfirsichmix in Liter

Die Nebenbedingungen sind: $x \geq 0$, $y \geq 0$
(1) $x + y \geq 35 \Rightarrow y \geq -x + 35$ (Mindestverbrauch 35 Liter)
(2) $y \geq 15$ (15 Liter Pfirsichmix sollen verbraucht werden)
(3) $x \geq y \Rightarrow y \leq x$ (Himbeertraum mindestens so viel wie Pfirsichmix)
(4) $2y \geq x \Rightarrow y \geq 0{,}5x$ (Himbeertraum soll nicht mehr als doppelt so viel sein)

Die zu minimierende Zielfunktion lautet $Z = 0{,}6 \cdot (y - 15) + 0{,}75x$

Der Ausdruck (y-15) entsteht dadurch, dass noch 15 Liter Pfirsichmix auf Lager sind und nur die Menge oberhalb von 15 Liter hinzugekauft werden muss.

$$\Rightarrow Z = 0{,}6y - 9 + 0{,}75x \Rightarrow y = -1{,}25x + 15 + \frac{Z}{0{,}6}$$



Der nach oben offene Planungsbereich ist schraffiert.
Die gestrichelte Zielfunktionsgerade muss einen möglichst kleinen y-Achsenabschnitt besitzen.
Die Zielfunktionsgerade hat mit dem Planungsbereich den Punkt P(x/y) = P(17,5/17,5) gemeinsam.
Das heißt sie benötigen von jeder Sorte 17,5 Liter.

Die minimalen Kosten betragen $Z = 0{,}6 \cdot (17{,}5 - 15) + 0{,}75 \cdot 17{,}5 = 14{,}63$ €.