Begleitbuch für Mathematik Oberstufe
für die Abiturprüfung 2019
Baden-Württemberg - berufliche Gymnasien

Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Dipl.-Math. Alexander Schwarz
Im Weinberg 9
74389 Cleebronn

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: **www.mathe-aufgaben.com**

Vorwort

Zunächst einmal bedanke ich mich bei euch für das Vertrauen, das ihr mir mit dem Kauf dieses Buches für die Abiturprüfung in Mathematik entgegengebracht habt!
Der darin enthaltene Stoff der **Mathematischen Beschreibung von Prozessen durch Matrizen** ist auf den Inhalt der **Abiturprüfung 2019** von **Baden-Württemberg für berufliche Gymnasien** abgestimmt.

Ich habe mir zum Ziel gesetzt, alle Themen so verständlich wie möglich darzustellen und auf „fachchinesisch“ zu verzichten (gemäß Albert Einstein: „Alles sollte so einfach wie möglich gemacht werden, aber nicht einfacher“).

In jedem Kapitel werden die wesentlichen Inhalte zu jedem Thema ausführlich beschrieben.
Die Beispielrechnungen und Schaubilder dienen dazu, die Beschreibungen noch konkreter zu erläutern.

Wichtige Formeln oder Rechenverfahren sind in dem Buch mit einem fetten Rahmen dargestellt.

Außerdem solltet ihr euch im Vorfeld der Abiturprüfung bzw. einer Klausur mit der "Merkhilfe" (kurze Formelsammlung) vertraut machen, die ihr im Teil mit Hilfsmittel verwenden dürft.
Die Merkhilfe für die Beschreibung von Prozessen durch Matrizen findet ihr auf Seite iii in diesem Buch.

VORSICHT FALLE:
Nach meiner Erfahrung hilft es Schülern, wenn man nicht nur darstellt, wie etwas gemacht wird, sondern auch, welche Fehler auftreten können.
Ich habe daher typische Fehler und Irrtümer dargestellt, die Schüler aufgrund meiner langjährigen Erfahrung immer wieder machen. Wer diese "Fettnäpfchen" kennt, kann ihnen besser ausweichen.

Um zu prüfen, ob ihr den Stoff auch verstanden habt, befinden sich in diesem Buch nach jedem Kapitel viele Übungsaufgaben (über alle 4 Kapitel sind es fast 60 Aufgaben).
Die Original-Prüfungsaufgaben der Jahre 2017 und 2018 findet ihr als kostenfreien Download auf meiner Homepage www.mathe-aufgaben.com unter dem Menüpunkt Aufgaben ->Abitur.

WAS MAN WISSEN SOLLTE:

Nach jedem Kapitel findet man eine kurze Zusammenfassung der wichtigsten Formeln und Regeln.

Die Musterlösungen aller Übungsaufgaben aus dem Buch werden als pdf-Dateien über einen geschlossenen Download-Bereich auf meiner Homepage zur Verfügung gestellt.
Ihr habt als Besteller des Buches die Zugangsdaten zu diesem Bereich von mir per Mail erhalten.

Hinweis zur Abiturprüfung:
Im ersten Teil der Abiturprüfung darf kein Taschenrechner und keine Merkhilfe genutzt werden.
Im zweiten Teil darf der wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) sowie die Merkhilfe (MH) genutzt werden.
Alle Aufgaben, bei denen ihr einen Taschenrechner und die Merkhilfe verwenden dürft, habe ich durch die Kennung **(WTR, MH)** ergänzt.

Anregungen und konstruktive Kritik zu diesem Buch werden von mir gerne entgegengenommen und bei der nächsten Aktualisierung berücksichtigt.

Weitere Informationen zur Abiturprüfung für berufliche Gymnasien findet ihr auf www.mathe-aufgaben.com.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und alles Gute für eure Abiturprüfung!

Alexander Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Merkhilfe Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

Addition

Man kann Matrizen nur addieren, wenn sie in ihrer Zeilen- und Spaltenanzahl übereinstimmen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit einem Skalar

$$r \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot a_{11} & r \cdot a_{12} \\ r \cdot a_{21} & r \cdot a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Matrizenmultiplikation

Zwei Matrizen $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ können nur dann miteinander multipliziert werden, wenn die Spaltenanzahl von $\boldsymbol{A}$ mit der Zeilenanzahl von $\boldsymbol{B}$ übereinstimmt.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Im Allgemeinen gilt: $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A}$

Einheitsmatrix

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{E} = \boldsymbol{A}$$

Inverse Matrix

Für eine invertierbare Matrix $\boldsymbol{A}$ und ihre Inverse $\boldsymbol{A}^{-1}$ gilt: $\boldsymbol{A}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{E}$

Potenz einer Matrix

Für eine quadratische Matrix $\boldsymbol{A}$ gilt: $\boldsymbol{A}^n = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{A}}_{n \text{ Faktoren}}$

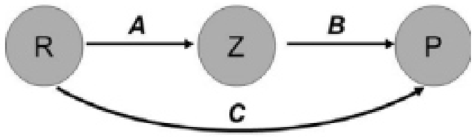
Produktionsprozesse

Ausgangszustand R; Zwischenzustand Z; Endzustand P

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $\boldsymbol{A}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{B}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $\boldsymbol{C}$



Verbrauchs- und Produktionsvektoren

Rohstoffe $\vec{r}$, Zwischenprodukte $\vec{z}$, Endprodukte $\vec{p}$

$\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \vec{z}$ $\quad$ $\vec{z} = \boldsymbol{B} \cdot \vec{p}$ $\quad$ $\vec{r} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} \cdot \vec{p} = \boldsymbol{C} \cdot \vec{p}$

Kostenvektoren (variable Kosten pro Mengeneinheit)

Materialkosten $\vec{k}_R$, Fertigungskosten der Zwischenprodukte $\vec{k}_Z$,
Fertigungskosten der Endprodukte $\vec{k}_P$

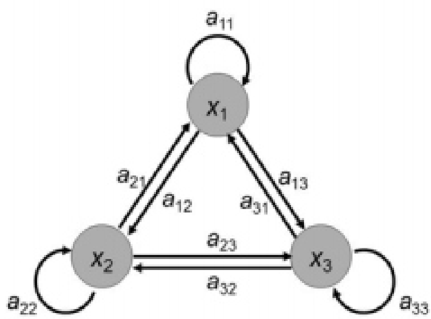
variable Herstellkosten (pro Mengeneinheit eines Endproduktes) $\vec{k}_v = \vec{k}_R \cdot \boldsymbol{C} + \vec{k}_Z \cdot \boldsymbol{B} + \vec{k}_P$

Gesamtkosten $K = \vec{k}_v \cdot \vec{p} + K_{fix}$

Übergangsprozesse

Übergangsmatrix zum nebenstehenden Übergangsgraph

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}$$



Stochastische Matrix $\quad$ alle Elemente nicht negativ und Spaltensummen gleich 1

Aus Verteilung $\vec{x}$ wird Verteilung $\vec{y}$ $\quad$ $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \boldsymbol{A} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \vec{y}$

Stabilitätsvektor $\vec{x}$ $\quad$ $\boldsymbol{A} \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Zyklischer Prozess $\quad$ $\boldsymbol{A}^k = \boldsymbol{E}$ für ein $k > 1$

1 Lineare Gleichungssysteme

1.1 Begriff lineares Gleichungssystem

Ein lineares Gleichungssystem (dies wird ab jetzt mit „LGS“ abgekürzt) besteht im Allgemeinen aus mehreren Gleichungen mit mehreren Unbekannten.
Die Anzahl der Gleichungen muss dabei nicht der Anzahl der Unbekannten entsprechen.

Beispiel 1.1: Lineare Gleichungssysteme sind zum Beispiel

a) $\begin{array}{rrrcl} x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & 2 \\ -5x_1 & -x_2 & +4x_3 & = & 5 \\ 6x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 5 \end{array}$ b) $\begin{array}{rrcl} a & +b & = & 5 \\ a & -b & = & 9 \\ 4a & +b & = & 8 \end{array}$ c) $\begin{array}{rrrcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ -6x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 4 \end{array}$

a) 3 Gleichungen mit 3 Variablen
b) 3 Gleichungen mit 2 Variablen (mehr Gleichungen als Variable →*"überbestimmtes LGS"*
c) 2 Gleichungen mit 3 Variablen (mehr Variable als Gleichungen →*"unterbestimmtes LGS"*

1.2 Lösen linearer Gleichungssysteme

Ein LGS zu lösen bedeutet, dass wir für jede Variable eine Zahl finden, so dass alle Gleichungen des LGS eine wahre Aussage ergeben.
Für das LGS in Beispiel 1.1 a) wäre eine Lösung $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, was man durch Einsetzen der Zahlen in die einzelnen Zeilen sofort prüfen kann:
Zeile 1: $1+2\cdot 2-3=2$ passt
Zeile 2: $-5\cdot 1-2+4\cdot 3=5$ passt
Zeile 3: $6\cdot 1+2-3=5$ passt

Diese Lösung war nun vorgegeben und wir haben lediglich kontrolliert, ob die vorgegebene Lösung tatsächlich eine ist.
Wie schaffen wir es aber, diese Lösung selbst zu berechnen?

Wir betrachten im nächsten Beispiel zunächst ein Gleichungssystem, mit dem diese Berechnung ganz einfach geht:

Beispiel 1.2: Gegeben ist folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcl} 2x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 1 \\ & 3x_2 & +x_3 & = & 9 \\ & & 5x_3 & = & 15 \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem wird so gelöst:
Aus der 3.Zeile folgt: $5x_3 = 15 \Rightarrow x_3 = 3$
Aus der 2.Zeile folgt: $3x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow 3x_2 + 3 = 9 \Rightarrow x_2 = 2$
Aus der 1.Zeile folgt: $2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \Rightarrow 2x_1 + 2 - 3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

Das Ergebnis wird als Lösungsvektor dargestellt: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Das LGS in Beispiel 1.2 ist in der **Stufenform** dargestellt.

Damit ein LGS gelöst werden kann, muss es in die Stufenform gebracht werden.

Ein LGS können wir durch folgende Umformungen in die Stufenform umwandeln:

- Zwei Gleichungen des Gleichungssystems vertauschen
- Eine Gleichung mit einer beliebigen Zahl $b \neq 0$ durchmultiplizieren
- Eine Gleichung durch die Summe / Differenz eines Vielfachen von ihr und eines Vielfachen einer anderen Gleichung des LGS ersetzen.

Das Rechenverfahren, um ein LGS in die Stufenform zu bringen, wird **Gauß-Verfahren** genannt. Dieses Gauß-Verfahren wird nun vorgestellt:

Beispiel 1.3: Umwandlung eines LGS in Stufenform

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & +x_2 & +4x_3 & = & 14 \\ 2x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 10 \\ 5x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 18 \end{array}$$

<u>1.Schritt:</u>
Wir schreiben das LGS zunächst in eine Matrix (um Schreibarbeit zu sparen).
Hierbei werden nur die Koeffizienten (=Zahlen vor den Variablen) und die Ergebnisspalte des LGS in einer Tabelle aufgeschrieben und die Variablen weggelassen.

$$\xrightarrow{\text{1. Schritt}} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 10 \\ 5 & 2 & 3 & 18 \end{array}\right)$$

<u>2.Schritt:</u>
Im zweiten Schritt soll erreicht werden, dass die Zahlen in der linken Spalte mit Ausnahme der obersten Zahl zu "0" werden (siehe die eingerahmten Zahlen unten)
Dies erreichen wir durch Addition der 1. und 2.Zeile bzw. der 1. und 3.Zeile.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ \boxed{2} & 1 & 2 & 10 \\ \boxed{5} & 2 & 3 & 18 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-2) \quad |\cdot(-5) \\ \\ \\ \end{array}$$

Damit sich beim Addieren 0 ergibt, müssen wir vorher die Zeilen mit einer geeigneten Zahl durchmultiplizieren. Die Pfeile bedeuten jeweils eine Addition der entsprechenden Zeilen, wobei die Pfeilspitze dort hinzeigt, wo das Ergebnis der Summe stehen soll.

Die Zeile, von der die Pfeile wegzeigen (hier die 1.Zeile) schreiben wir wieder ab.
Die Multiplikation mit -2 bzw. mit -5 erfolgt nur bei der Addition der Zeilen.

Ergebnis: $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 1\cdot(-2)+2 & 1\cdot(-2)+1 & 4\cdot(-2)+2 & 14\cdot(-2)+10 \\ 1\cdot(-5)+5 & 1\cdot(-5)+2 & 4\cdot(-5)+3 & 14\cdot(-5)+18 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & -3 & -17 & -52 \end{array}\right)$$

<u>3.Schritt:</u>
In der zweiten Spalte soll nun durch Addition der 2. und 3. Zeile der untere Eintrag auf „0“ gesetzt (siehe eingerahmte Zahl unten)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & \boxed{-3} & -17 & -52 \end{array}\right) \,|\cdot(-3)$$

Die 2. Zeile, von der der Pfeil weg zeigt, wird dabei wieder abgeschrieben.

Ergebnis: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 14 \\ 0 & -1 & -6 & -18 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$

VORSICHT FALLE:
Im 3.Schritt dürfen wir nicht die 1. und 3.Zeile miteinander verrechnen, weil dadurch der "0"-Eintrag links unten, den wir im 2.Schritt erzeugt haben, wieder zerstört werden würde.

Nun besitzt das Gleichungssystem die geforderte Stufenform, so dass wir das LGS nun lösen können:

Aus der 3.Zeile: $x_3 = 2$ Aus der 2.Zeile: $-x_2 - 6 \cdot 2 = -18 \Rightarrow x_2 = 6$
Aus der 1.Zeile: $x_1 + 1 \cdot 6 + 4 \cdot 2 = 14 \Rightarrow x_1 = 0$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hinweise zum Gauß-Verfahren:

1.) Wenn zu Beginn der Eintrag links oben "0" ist (siehe Fall A) oder einer "komplizierten" Zahl entspricht (siehe Fall B), muss man zunächst die Zeilen in dem LGS vertauschen.

Fall A: $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -5 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & -5 & 9 \end{array}\right)$

Die Addition der 1. und 3.Zeile können wir uns sparen, weil links unten bereits eine "0" steht.

Fall B: $\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 7 & 1 & -4 & -5 \\ 5 & 2 & 3 & 6 \end{array}\right)$

Wenn es möglich ist, die Zahl "1" links oben durch Zeilenvertauschung zu erhalten, sollte man die Zeilenvertauschung vornehmen.

2.) Sollte nach dem 2.Schritt die Matrix die Gestalt $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 7 \end{array}\right)$ haben, braucht man den 3.Schritt nicht mehr durchzuführen, sondern kann einfach die 2. und 3. Zeile vertauschen.

3.) Anstatt 2 Zeilen zu addieren dürfen auch Zeilen subtrahiert werden. Allerdings passieren beim Subtrahieren erfahrungsgemäß mehr Rechenfehler.

1.3 Mögliche Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen

In den Beispielen in Kapitel 1.2 hatten die LGS immer genau eine Lösung.
Dies ist jedoch nicht immer so, wie die Beispiele 1.4 und 1.5 zeigen:

Beispiel 1.4:

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 3 \\ x_1 & -3x_2 & +2x_3 & = & -1 \\ x_1 & +7x_2 & -3x_3 & = & 4 \end{array}$$

Durch Tausch der 1. und 2.Zeile erreichen wir, dass links oben eine "1" steht.

1.Schritt: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 4 \end{array}\right)$

2.Schritt: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & 3 \\ 1 & 7 & -3 & 4 \end{array}\right)$ $|\cdot(-2)$ $|\cdot(-1)$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right)$

3.Schritt: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \end{array}\right)$ $|\cdot(-1)$ $\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

Die 3. Zeile der Matrix (eine Nullzeile) stellt eine **wahre Aussage** dar: 0 = 0

Da wir mit der 3. Zeile nicht x_3 berechnen können, dürfen wir die Zeile einfach streichen.
Durch das Weglassen der letzten Zeile erhalten wir nun ein LGS mit mehr Variablen (3 Stück) als Gleichungen (2 Stück).
Damit haben wir ein "unterbestimmtes LGS" (also mehr Variablen als Gleichungen).
Eine eindeutige Lösung des LGS ist daher nicht mehr erreichbar.
Wir erhalten in diesem Fall **unendlich viele Lösungen**.

Um die unendlich vielen Lösungen darzustellen, benötigen wir einen Parameter t:
Wir beginnen mit der 2.Zeile: $10x_2 - 5x_3 = 5$.
Wir setzen $x_3 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$ (t steht stellvertretend für eine beliebige Zahl)

Aus der 2.Zeile ergibt sich: $10x_2 - 5t = 5 \Rightarrow 10x_2 = 5 + 5t \Rightarrow x_2 = 0{,}5 + 0{,}5t$
Aus der 1.Zeile ergibt sich: $x_1 - 3(0{,}5 + 0{,}5t) + 2t = -1 \Rightarrow x_1 = 0{,}5 - 0{,}5t$

Lösungsvektor: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}5t \\ 0{,}5 + 0{,}5t \\ t \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}$

Wenn wir für den Parameter t eine beliebige Zahl einsetzen, können wir eine der unendlich vielen Lösungen bestimmen.

Zum Beispiel ergibt sich für t = 0: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Beispiel 1.5:

$$\begin{array}{rrrcl} & -7x_2 & -7x_3 & = & 2 \\ x_1 & +2x_2 & +3x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & -8x_2 & -5x_3 & = & 5 \end{array}$$

Da links oben eine "0" steht, muss die 1. und 2.Zeile vertauscht werden:

1.Schritt: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right)$

2.Schritt: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 3 & -8 & -5 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} |\cdot(-3) \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array}\right)$

3.Schritt: $\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & -14 & -14 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ |\cdot(-2) \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right)$

Die 3.Zeile der Matrix zeigt einen **Widerspruch**: 0 = -2
Das heißt, dass das LGS **keine Lösung** besitzt.

Ein LGS kann nur eine der folgenden Lösungsmengen besitzen:
1.) **keine** Lösung (Beispiel 1.5)

2.) **genau eine** Lösung, z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$ (Beispiel 1.3)

3.) **unendlich viele** Lösungen, z.B. $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 - 0{,}5t \\ 0{,}5 + 0{,}5t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$ (Beispiel 1.4)

WAS MAN WISSEN SOLLTE:

Um ein LGS zu lösen, muss das Gleichungssystem auf die Stufenform gebracht werden (in der Regel mit Hilfe des Additionsverfahrens).

Ein LGS hat entweder genau eine Lösung oder keine Lösung oder unendlich viele Lösungen. Bei unendlich vielen Lösungen taucht in den Lösungen der Parameter t auf.

Die Lösung des LGS kann als Lösungsvektor dargestellt werden.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1-1:
Bestimme den Lösungsvektor des Gleichungssystems.

a) $$\begin{aligned} 2x_1+x_2+2x_3&=4\\ x_1 \quad -3x_3&=-1\\ 3x_1+2x_2 \quad &=2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +x_2 & -x_3 & = & 0\\ 2x_1 & -x_2 & -5x_3 & = & 3\\ x_1 & +3x_2 & +x_3 & = & -2 \end{array}$$

c) $$\begin{array}{rrrcr} 4x_1 & -3x_2 & +7x_3 & = & 1\\ 5x_1 & -4x_2 & +6x_3 & = & 5\\ 2x_1 & -x_2 & +9x_3 & = & -7 \end{array}$$

d) $$\begin{array}{rrrcr} 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & = & -2\\ 2x_1 & +4x_2 & -3x_3 & = & 12\\ -x_1 & -9x_2 & +8x_3 & = & 5 \end{array}$$

Aufgabe 1-2:
Zeige, dass das LGS unlösbar ist.

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1\\ x_1 & -4x_2 & +2x_3 & = & 2\\ & -2x_2 & +x_3 & = & -1 \end{array}$$

Aufgabe 1-3:
Gib ein lineares Gleichungssystem mit 2 Unbekannten x_1 und x_2 an, welches keine Lösung besitzt.

Aufgabe 1-4:
Bestimme den Lösungsvektor des Gleichungssystems.

a) $$\begin{array}{rrcr} x_1 & +8x_2 & = & -1\\ x_1 & +2x_2 & = & 2\\ 2x_1 & +6x_2 & = & 3 \end{array}$$

b) $$\begin{array}{rrrcr} x_1 & -3x_2 & +x_3 & = & 2\\ 4x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = & 4\\ -4x_1 & +2x_2 & -x_3 & = & -2\\ 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & = & 2 \end{array}$$

Aufgabe 1-5:
Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 & +3x_2 & & = & 1\\ 2x_1 & +4x_2 & -x_3 & = & 0\\ 2x_1 & +2x_2 & -2x_3 & = & -2 \end{array}$$

a) Untersuche, ob $\overrightarrow{x_1}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{x_2}=\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\1\end{pmatrix}$ jeweils eine Lösung des Gleichungssystems ist.
b) Bestimme die allgemeine Lösung des Gleichungssystems.
c) Gib eine Lösung mit ganzzahligen Koeffizienten an.
d) Gibt es einen Lösungsvektor, bei dem alle drei Koordinaten gleich sind?

1.4 Anwendungsaufgaben zu linearen Gleichungssystemen

Bei Anwendungsaufgaben zu LGS geht es darum, selbständig ein LGS aufzustellen und die Lösungen entsprechend zu interpretieren.
Typische Aufgaben kommen aus dem Bereich der

- Mischungsrechnung
- Transportprobleme
- Aufstellen von Funktionsgleichungen (wird im Buch zur „Analysis“ behandelt)

Zur Lösung einer Anwendungsaufgabe geht man folgendermaßen vor:

1.Schritt: Überlegung, wie viele verschiedene Variablen eingeführt werden müssen und welche Bedeutung die Variablen haben

2.Schritt: Aus den Bedingungen des Textes werden die Gleichungen aufgestellt. Dabei muss nicht zwangsläufig die Anzahl der aufzustellenden Gleichungen mit der Anzahl der Variablen übereinstimmen. Falls man mehr Variablen als Gleichungen besitzt, gibt es jedoch keine eindeutige Lösung!

3.Schritt: LGS lösen und die Lösungen gemäß Aufgabenstellung interpretieren

Da bei Mischungsaufgaben auch ggf. Kenntnisse der **Prozentrechnung** erforderlich sind, folgt hierzu eine kurze Wiederholung:

p% einer Zahl x bedeutet einen Anteil $\frac{p}{100}$ von x.

Der Anteil einer Zahl wird mit Hilfe der Multiplikation berechnet: $\frac{p}{100}$ von x $= \frac{p}{100} \cdot x$

Beispiel: 7% von 80 = $\frac{7}{100} \cdot 80 = 0{,}07 \cdot 80 = 5{,}6$

Erhöhung eines Preises von 110 € um 3%: 103% von 110 $= \frac{103}{100} \cdot 110 = 113{,}3$ €

Senkung eines Preises von 90 € um 15%: 85% von 90 = $\frac{85}{100} \cdot 90 = 0{,}85 \cdot 90 = 76{,}5$ €

Beispiel 1.6: Mischungsaufgabe

Im Versuchslabor eines Getränkeherstellers soll aus den drei angegebenen Mischgetränken A, B und C eine neue Sorte PLOP mit 50 % Fruchtsaftgehalt gemischt werden.
Wie kann man 6 Liter PLOP mit 20% Maracujaanteil aus den drei Sorten mischen?
A: Fruchtsaftgehalt 50% (Ananas 30%; Kirsche 15%; Maracuja 5%)
B: Fruchtsaftgehalt 40% (Ananas 10%; Kirsche 20%; Maracuja 10%)
C: Fruchtsaftgehalt 60% (Ananas 15%; Kirsche 15%; Maracuja 30%)

1.Schritt:
Bei dieser Aufgabe werden 3 unterschiedliche Variablen A, B, C benötigt mit folgender Bedeutung: A = Menge in Liter von Sorte A
B = Menge in Liter von Sorte B
C = Menge in Liter von Sorte C

<u>2.Schritt:</u>
Es soll 6 Liter insgesamt hergestellt werden: $A+B+C=6$
6 Liter PLOP soll 20% Maracuja enthalten: $0{,}05\cdot A+0{,}1\cdot B+0{,}3\cdot C=0{,}2\cdot 6$
(Hinweis: 5% von A Liter sind $0{,}05\cdot A$)
6 Liter PLOP soll 50% Fruchtsaftgehalt haben: $0{,}5\cdot A+0{,}4\cdot B+0{,}6\cdot C=0{,}5\cdot 6$

<u>3.Schritt:</u>

Lösung des LGS: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0{,}05 & 0{,}1 & 0{,}3 & 1{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}6 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 5 & 10 & 30 & 120 \\ 5 & 4 & 6 & 30 \end{array}\right) \;|\cdot(-5)$

$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 25 & 90 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \;|\cdot 5 \quad \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 25 & 90 \\ 0 & 0 & 30 & 90 \end{array}\right)$

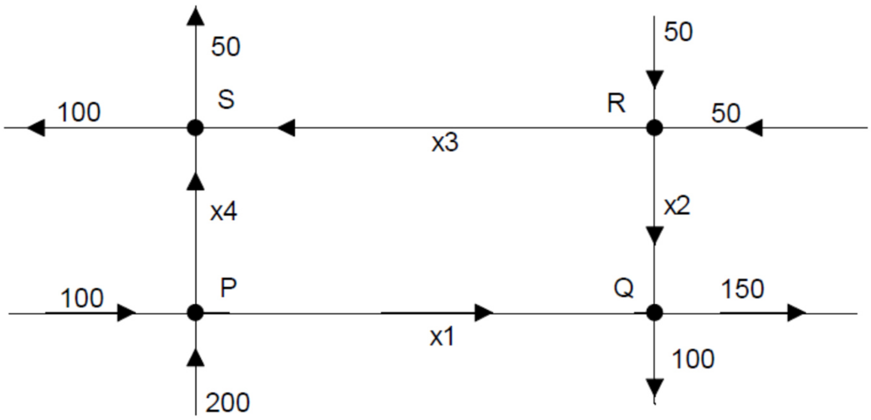
Aus der 3.Zeile folgt C=3
Eingesetzt in die 2.Zeile: $5B+25\cdot 3=90 \Rightarrow B=3$
Eingesetzt in die 1.Zeile: $A+3+3=6 \Rightarrow A=0$

Man benötigt von A gar nichts und von B und C jeweils 3 Liter.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1-6: WTR, MH
Messing ist eine Legierung aus Kupfer und Zink. Aus den in genügender Menge vorhandenen Messingsorten A (Kupfergehalt 80%) und B (Kupfergehalt 60%) sollen vier Tonnen Messing mit einem Kupfergehalt von 65% hergestellt werden. Berechne die Anteile der Sorten A und B in der Mischung.

Aufgabe 1-7: WTR, MH
Die Abbildung zeigt einen Ausschnitt aus einem Straßennetz. Dargestellt sind vier Kreuzungen S,P, Q und R, in die nur Einbahnstraßen münden. Auf die Kreuzung S fahren pro Stunde zum Beispiel x_3 Autos von rechts und x_4 Autos von unten. Nach oben fahren pro Stunde 50 Autos weg und nach links 100 Autos.



a) Stelle ein lineares Gleichungssystem auf, wenn kein Stau auf den Kreuzungen entstehen soll.
b) Löse das lineare Gleichungssystem, wenn $x_4 = 100$ ist.
c) Wie groß muss x_4 mindestens sein, damit der Verkehr auf allen Kreuzungen fließen kann?