Begleitbuch für Mathematik Oberstufe
für die Abiturprüfungen 2020
Baden-Württemberg - allgemeine Gymnasien

Aufgabensammlung Pflicht-/Wahlteil
Analysis, Stochastik, Analytische Geometrie

Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: **www.mathe-aufgaben.com**

Vorwort

Zunächst einmal bedanke ich mich bei euch für das Vertrauen, das ihr mir mit dem Kauf dieses Buches für die Abiturprüfung in Mathematik entgegengebracht habt!
Das Buch ist eine Aufgabensammlung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfung 2020** von **Baden-Württemberg** für **allgemeinbildende Gymnasien**.

Durch die Änderungen in der Abiturprüfung ab 2019 (GTR ist nicht mehr erlaubt) können die meisten Original-Wahlteilaufgaben der Abiturprüfungen bis 2018 nicht mehr zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden.
Da im Gegensatz zu den Wahlteilaufgaben die Pflichtteilaufgaben der Abiturprüfungen bis 2018 auch weiterhin zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden können, habe ich den Schwerpunkt dieser Aufgabensammlung auf die Wahlteilaufgaben gelegt.

Das Buch enthält 6 Pflichtteilaufgabensätze (mit je 7 Aufgaben) und 51 Wahlteilaufgabensätzen über das gesamte Stoffgebiet (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik).
Die Pflichtteilaufgaben stammen nicht von alten Abiturprüfungen.

Die Wahlteilaufgaben sind teilweise von mir selbst entwickelt, teilweise sind es von mir abgewandelte alte Abituraufgaben, so dass die Aufgaben mit Hilfe des WTR gelöst werden können.

Weitere Übungsaufgaben zur Vorbereitung auf eure Prüfung findet ihr unter
https://www.mathe-aufgaben.com/aufgaben/abitur/bw-allgemein-bildende-gymnasien-ab-2019.html

Mit Hilfe der ausführlichen Musterlösungen aller Aufgaben im hinteren Teil des Buches könnt ihr prüfen, ob eure Ergebnisse und Rechenwege richtig sind.

Hinweis zum Taschenrechner:
Im Pflichtteil der Abiturprüfung darf kein Taschenrechner und keine Merkhilfe genutzt werden.
Im zweiten Teil darf der wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) sowie die Merkhilfe genutzt werden.

Anregungen und konstruktive Kritik zu diesem Buch werden von mir gerne entgegengenommen und bei der nächsten Aktualisierung berücksichtigt.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und alles Gute für eure Abiturprüfung !

Alexander Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1 Sechs Pflichtteilaufgabensätze

Pflichtteilaufgabensatz 1

Aufgabe 1-1:
Bestimme die Ableitung von $f(x)=(x^2+3)\cdot e^{1-2x}$ und fasse den Funktionsterm so weit wie möglich zusammen.

Aufgabe 1-2:
Gegeben ist die Funktion $f(x)=0{,}5\cdot e^{2x-3}$.
Bestimme diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt P(1,5|1) geht.

Aufgabe 1-3:
Löse die Gleichung $e^x-8e^{-x}=2$.

Aufgabe 1-4:
Bestimme a, b und c so, dass der Graph der Funktion f mit $f(x)=ax^4-bx^2+5x-c$ den Punkt P(2|-3) enthält und den Wendepunkt W(1|-5) hat.

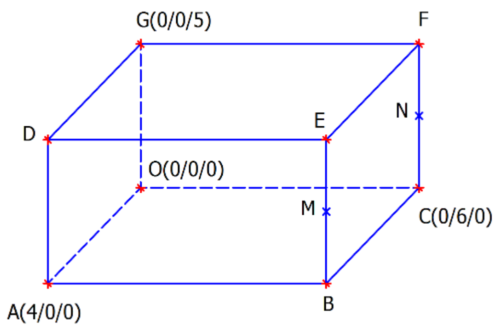
Aufgabe 1-5:
In der Abbildung ist ein Quader dargestellt, M und N seien Mittelpunkte der beiden Kanten $\overline{BE}$ bzw. $\overline{CF}$.

a) Bestimme die Koordinaten der übrigen Punkte.

b) Gib eine Koordinatengleichung der Ebene durch B, E und F an.

c) Prüfe rechnerisch, ob sich die Geraden durch A und N sowie durch G und M schneiden.

d) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene durch A, O, E und F.



Aufgabe 1-6:

Bestimme denjenigen Punkt A auf g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$, welcher von P(5|1|0) und Q(6|3|7) die gleiche Entfernung hat.

Aufgabe 1-7:
Ein Elfmeterschütze trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% ins Tor. Er schießt 20 mal.
a) Wie lautet der Term, der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass er zweimal danebenschießt?
b) Gib ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$$P(A)=\binom{20}{19}\cdot 0{,}9^{19}\cdot 0{,}1+0{,}9^{20} \qquad P(B)=1-0{,}9^{20}$$

Pflichtteilaufgabensatz 2

Aufgabe 2-1:
Leite die Funktion $f(x) = (1 + \cos(x))^5$ einmal ab.

Aufgabe 2-2:
Berechne eine Stammfunktion von $f(x) = 5e^{2x} - \frac{5}{3x^3}$

Aufgabe 2-3:
Löse die Gleichung $\sin^2(x) - \sin(x) = 0$ für $0 \leq x < 2\pi$.

Aufgabe 2-4:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} - 2$.
a) Gib die Gleichung der Asymptote an.
b) Weise nach, dass das Schaubild streng monoton fällt.
c) Das Schaubild von f schließt mit den Koordinatenachsen eine Fläche ein. Berechne den Inhalt der Fläche.

Aufgabe 2-5:
Gegeben sind die Ebenen E: $2x_1 + x_2 - 4x_3 + 12 = 0$ und F: $3x_1 - x_2 + 2x_3 + 6 = 0$.
a) Begründe, dass die beiden Ebenen nicht zueinander parallel sind.
b) Bestimme die Gleichung der Schnittgerade g der beiden Ebenen.

Aufgabe 2-6:
Gegeben sind eine Ebene E und eine Gerade g durch

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix};\ r,s \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};\ t \in \mathbb{R}$$

a) Gib eine Koordinatengleichung der Ebene E an.
b) Bestimme den Schnittpunkt S der Ebene und der Geraden
c) Stelle die Gleichung einer Geraden h auf, die in der Ebene E liegt.

Aufgabe 2-7:
Ein Glücksrad besteht aus 3 Feldern A, B und C.
Wird Feld A mit Mittelpunktswinkel 180° gedreht, erhält der Spieler 4€.
Wird Feld B gedreht, muss der Spieler 6 € bezahlen.
Wird Feld C gedreht, erhält der Spieler 2€.

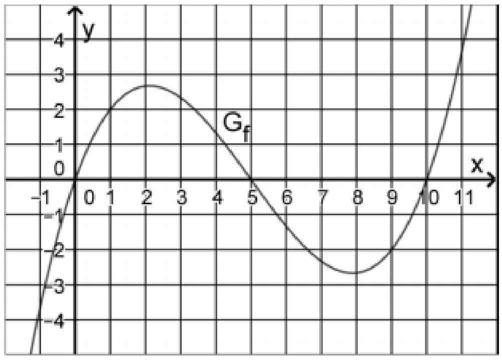
Wie groß muss der Mittelpunktswinkel von Feld B sein, damit das Spiel fair ist?

2 Wahlteilaufgaben zur Analysis

W1: Ganzrationale Funktion

Teil 1:

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f einer ganzrationalen Funktion dritten Grades. G_f schneidet die x-Achse bei x = 0, x = 5 und x = 10 und verläuft durch den Punkt P(1|2).



a) Ermittle einen Funktionsterm von f.
(zur Kontrolle: $f(x)=\frac{1}{18}(x^3-15x^2+50x)$)

b) Zeige, dass G_f im Punkt W(5|0) einen Wendepunkt besitzt und ermittle eine Gleichung der Tangente an G_f im Punkt W.

c) G_f geht aus dem Graphen der Funktion $g(x)=\frac{1}{18}(x^3-25x)$ durch eine Verschiebung in x-Richtung hervor. Ermittle, um wie viel der Graph von g dazu verschoben werden muss. Begründe mit Hilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich seines Wendepunktes ist.

Im Folgenden wird für $x \in \mathbb{R}$ die Funktion $J_1(x)=\int_1^x f(t)dt$ betrachtet.

d) J_1 hat für $0 \le x \le 10$ zwei ganzzahlige Nullstellen. Gib diese an und begründe deine Angabe.
Begründe mit Hilfe der Abbildung, dass J_1 mindestens eine weitere positive Nullstelle hat.
Begründe, dass J_1 höchstens 4 Nullstellen hat.

e) Für $0 \le x \le 5$ gilt, dass der Graph von f und der Graph einer trigonometrischen Funktion h
I) die gleichen Schnittpunkte mit der x-Achse besitzen
II) beide nicht unterhalb der x-Achse verlaufen
III) jeweils mit der x-Achse eine Fläche des Inhalts $\frac{625}{72}$ einschließen.
Bestimme einen Termin einer solchen Funktion h.

5 Lösungen zu Pflichtteilaufgaben

Lösung Pflichtteilaufgabensatz 1

Aufgabe 1-1:

$f(x)=(x^2+3)\cdot e^{1-2x}$ muss mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden.

Es ist $u(x)=x^2+3$ und $v(x)=e^{1-2x}$.

Daraus folgt $u'(x)=2x$ und $v'(x)=-2\cdot e^{1-2x}$.

Die Ableitungsfunktion lautet allgemein: $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

$f'(x)=2x\cdot e^{1-2x}+(x^2+3)\cdot(-2)\cdot e^{1-2x}=2e^{1-2x}\cdot(x-x^2-3)$

Aufgabe 1-2:

Es ist $f(x)=0{,}5\cdot e^{2x-3}$

Die allgemeine Stammfunktion von f lautet $F(x)=0{,}5\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{2x-3}+C=\frac{1}{4}e^{2x-3}+C$

P(1,5/1) soll auf Schaubild von F liegen: $F(1{,}5)=1\Rightarrow 1=\frac{1}{4}e^{2\cdot 1{,}5-3}+C\Rightarrow 1=\frac{1}{4}e^{0}+C\Rightarrow C=0{,}75$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x)=\frac{1}{4}e^{2x-3}+0{,}75$

Aufgabe 1-3:

$e^x-8e^{-x}=2 \mid \cdot e^x$

$\Rightarrow e^{2x}-8=2e^x \quad \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x-8=0$

Substitution: $u=e^x$ (und damit ist $e^{2x}=u^2$)

Die Gleichung nach der Substitution lautet: $u^2-2u-8=0$

Anwendung der Lösungsformel: $u_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 1\cdot(-8)}}{2}=\frac{2\pm 6}{2}\Rightarrow u=4$ oder u = -2

Rücksubstitution: $e^x=4\Rightarrow x=\ln(4)$

$e^x=-2$ ist nicht lösbar

Aufgabe 1-4:

Es gilt: $f'(x)=4ax^3-2bx+5$ und $f''(x)=12ax^2-2b$

Einsetzen von P(2/-3): $f(2)=-3\Rightarrow 16a-4b+10-c=-3\Rightarrow 16a-4b-c=-13$

Einsetzen von W(1/-5): $f(1)=-5\Rightarrow a-b+5-c=-5\Rightarrow a-b-c=-10$

Wendestelle bei x = 1: $f''(1)=0\Rightarrow 12a-2b=0$

Nun muss das lineare Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{array}{rrrcrc} 16a & -4b & -c & = & -13 & (1)\\ a & -b & -c & = & -10 & (2)\\ 12a & -2b & & = & 0 & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{c|rrrcrc} (1) & 16a & -4b & -c & = & -13 & (1)\\ (1)-1\cdot(2) & 15a & -3b & & = & -3 & (4)\\ (3) & 12a & -2b & & = & 0 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|rrrcr} (1) & 16a & -4b & -c & = & -13\\ (4) & 15a & -3b & & = & -3\\ 2\cdot(4)-3\cdot(3) & -6a & & & = & -6 \end{array}$$

Aus der 3.Zeile folgt a = 1
Aus der 2.Zeile folgt b = 6
Aus der 1.Zeile folgt c = 5
Die gesuchte Funktion lautet $f(x)=x^4-6x^2+5x-5$