Begleitbuch für Mathematik Oberstufe
für die Abiturprüfungen 2019 und 2020
Baden-Württemberg - allgemeine Gymnasien

Aufgabensammlung Pflicht-/Wahlteil
Analysis, Stochastik, Analytische Geometrie

Dipl.-Math. Alexander Schwarz

E-Mail: aschwarz@mathe-aufgaben.com

Homepage: **www.mathe-aufgaben.com**

Vorwort

Zunächst einmal bedanke ich mich bei euch für das Vertrauen, das ihr mir mit dem Kauf dieses Buches für die Abiturprüfung in Mathematik entgegengebracht habt!
Das Buch ist eine Aufgabensammlung zur Vorbereitung auf die **Abiturprüfungen 2019 und 2020** von **Baden-Württemberg** für **allgemeinbildende Gymnasien**.

Durch die Änderungen in der Abiturprüfung ab 2019 (GTR ist nicht mehr erlaubt) können die meisten Original-Wahlteilaufgaben der Abiturprüfungen bis 2018 nicht mehr zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden.
Da im Gegensatz zu den Wahlteilaufgaben die Pflichtteilaufgaben der Abiturprüfungen bis 2018 auch weiterhin zur Prüfungsvorbereitung genutzt werden können, habe ich den Schwerpunkt dieser Aufgabensammlung auf die Wahlteilaufgaben gelegt.

Das Buch enthält 6 Pflichtteilaufgabensätze (mit je 7 Aufgaben) und 51 Wahlteilaufgabensätzen über das gesamte Stoffgebiet (Analysis, Analytische Geometrie und Stochastik).
Die Pflichtteilaufgaben stammen nicht von alten Abiturprüfungen.
Die Wahlteilaufgaben sind teilweise von mir selbst entwickelt, teilweise sind es von mir abgewandelte alte Abituraufgaben, so dass die Aufgaben mit Hilfe des WTR gelöst werden können.

Mit Hilfe der ausführlichen Musterlösungen aller Aufgaben im hinteren Teil des Buches könnt ihr prüfen, ob eure Ergebnisse und Rechenwege richtig sind.

Hinweis zum Taschenrechner:
Im Pflichtteil der Abiturprüfung darf kein Taschenrechner und keine Merkhilfe genutzt werden.
Im zweiten Teil darf der wissenschaftliche Taschenrechner (WTR) sowie die Merkhilfe genutzt werden.

Anregungen und konstruktive Kritik zu diesem Buch werden von mir gerne entgegengenommen und bei der nächsten Aktualisierung berücksichtigt.

Viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Buches und alles Gute für eure Abiturprüfung !

Alexander Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1 Sechs Pflichtteilaufgabensätze

Pflichtteilaufgabensatz 1

Aufgabe 1-1:
Bestimme die Ableitung von $f(x) = (x^2+3)\cdot e^{1-2x}$ und fasse den Funktionsterm so weit wie möglich zusammen.

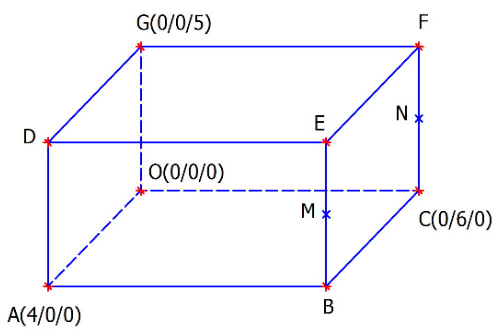
Aufgabe 1-2:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = 0{,}5\cdot e^{2x-3}$.
Bestimme diejenige Stammfunktion von f, deren Graph durch den Punkt P(1,5/1) geht.

Aufgabe 1-3:
Löse die Gleichung $e^x + 24\cdot e^{-x} = 11$.

Aufgabe 1-4:
Bestimme a, b und c so, dass der Graph der Funktion f mit $f(x) = ax^4 - bx^2 + 5x - c$ den Punkt P(2/-3) enthält und den Wendepunkt W(1/-5) hat.

Aufgabe 1-5:
In der Abbildung ist ein Quader dargestellt, M und N seien Mittelpunkte der beiden Kanten $\overline{BE}$ bzw. $\overline{CF}$.

a) Bestimme die Koordinaten der übrigen Punkte.
b) Gib eine Koordinatengleichung der Ebene durch B, E und F an.
c) Gib eine Geradengleichung der Geraden durch A und N sowie durch G und M an.
d) Bestimme eine Koordinatengleichung der Ebene durch A, O, E und F.



Aufgabe 1-6:
Die Ebene E enthält den Punkt A(2/-2/5) und die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$.

Bestimme eine Gleichung der Ebene F, welche ebenfalls die Gerade g enthält und orthogonal zu E ist.

Aufgabe 1-7:
Eine Blumenzwiebel keimt mit einer Wahrscheinlichkeit von 90%. Es werden 20 Zwiebeln gekauft.
I) Wie lautet der Term, der die Wahrscheinlichkeit angibt, dass alle 20 Zwiebeln keimen ?
II) Gib ein Ereignis A und ein Ereignis B an, so dass gilt:

$$P(A) = \binom{20}{18}\cdot 0{,}9^{18}\cdot 0{,}1^2 + 20\cdot 0{,}9^{19}\cdot 0{,}1 + 0{,}9^{20} \qquad P(B) = 1 - 0{,}1^{20}$$

2 Wahlteilaufgaben zur Analysis

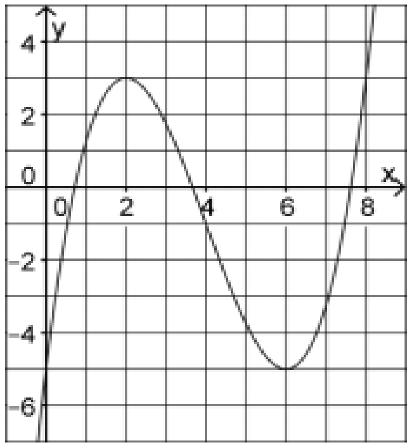
W1: Ganzrationale Funktion (ohne Anwendung / Schwerpunkt Dose)

Teil 1:

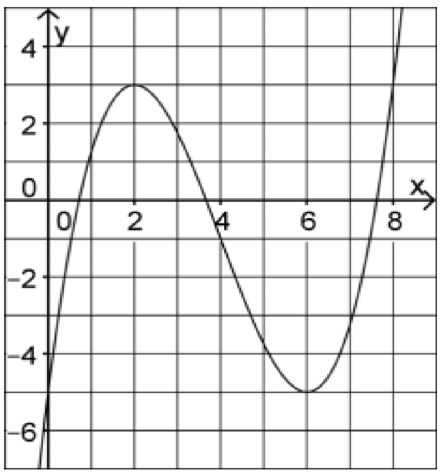
Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + 9x - 5$ und Definitionsmenge $\mathbb{R}$.

Die Abbildung zeigt den Graphen G_f von f.

a) Bestimme rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von G_f.
Betrachtet wird die Gleichung $f(x) = c$ mit $c \in \mathbb{R}$.
Ermittle mit Hilfe der Abbildung die Anzahl der Lösungen dieser Gleichung in Abhängigkeit von c.



b) Durch Verschiebung von G_f um 4 in negative x-Richtung und um 1 in positive y-Richtung entsteht der Graph einer Funktion g.
Gib einen Term von g an, an dem man diese Verschiebung erkennen kann.
Ein vereinfachter Term von g ist $g(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x$.
Begründe mithilfe der Funktion g, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Punktes P(4/-1) ist.
Bestätige rechnerisch, dass $\int_1^3 f(x)dx = 5$ gilt.
Bestimme damit ohne Verwendung einer Stammfunktion den Wert des Integrals $\int_5^7 f(x)dx$ und veranschauliche dein Vorgehen durch geeignete Eintragungen in der folgenden. Abbildung.



c) Die Funktion f gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$f_a(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x^2 + ax - 5$ und $a \in \mathbb{R}$.

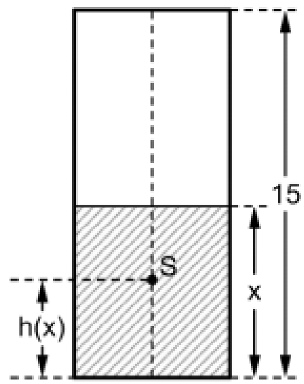
Der Graph von f_a wird als G_a bezeichnet.

Untersuche rechnerisch, für welche Werte von a der Graph G_a keinen Punkt besitzt, in dem die Tangente parallel zur x-Achse verläuft.

Teil 2:

Eine vertikal stehende Getränkedose hat die Form eines geraden Zylinders. Die Lage des gemeinsamen Schwerpunkts S von Dose und enthaltener Flüssigkeit hängt von der Füllhöhe der Flüssigkeit über dem Dosenboden ab. Ist die Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 15cm (vgl Abbildung rechts).

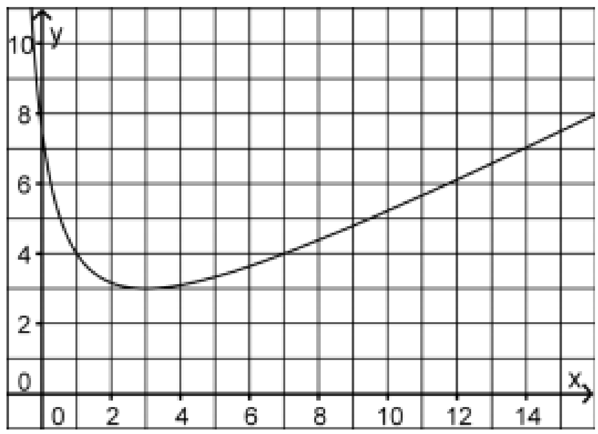
Die Abbildung unten zeigt den Graphen G_h der Funktion h, die für $0 \le x \le 15$ die Höhe des Schwerpunkts S über dem Dosenboden in Zentimetern angibt; dabei ist x die Füllhöhe in Zentimetern. G_h hat den Tiefpunkt (3/3).



a) Ermittle grafisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm oberhalb des Bodens der Dose liegt.

Die zunächst leere Dose wird langsam mit Flüssigkeit gefüllt, bis die maximale Füllhöhe von 15 cm erreicht ist.

Beschreibe die Bewegung des Schwerpunkts S während des Füllvorgangs.



b) Für die Funktion h gilt $h(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{8}{x+1}$.

Bestimme rechnerisch die Füllhöhen, bei denen der Schwerpunkt 4 cm über dem Dosenboden liegt.

c) Nun wird eine andere vertikal stehende Dose betrachtet, die ebenfalls die Form eines geraden Zylinders hat. Sowohl bei leerer als auch bei vollständig gefüllter Dose liegt der gemeinsame Schwerpunkt von Dose und enthaltener Flüssigkeit genau in der Mitte der Dose. Ist diese Dose vollständig gefüllt, so beträgt die Füllhöhe 11 cm.

Die Höhe des Schwerpunkts wird durch eine Funktion $k(x) = \frac{1}{2}x + s + \frac{t}{x+1}$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ beschrieben. Bestimme die passenden Werte von s und t.

3 Lösungen zu Pflichtteilaufgaben

Lösung Pflichtteilaufgabensatz 1

Aufgabe 1-1:

$f(x) = (x^2 + 3) \cdot e^{1-2x}$ muss mit der Produkt- und Kettenregel abgeleitet werden.

Es ist $u(x) = x^2 + 3$ und $v(x) = e^{1-2x}$.

Daraus folgt $u'(x) = 2x$ und $v'(x) = -2 \cdot e^{1-2x}$.

Die Ableitungsfunktion lautet allgemein: $f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

$f'(x) = 2x \cdot e^{1-2x} + (x^2 + 3) \cdot (-2) \cdot e^{1-2x} = 2e^{1-2x} \cdot (x - x^2 - 3)$

Aufgabe 1-2:

Es ist $f(x) = 0{,}5 \cdot e^{2x-3}$

Die allgemeine Stammfunktion von f lautet $F(x) = 0{,}5 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{2x-3} + C = \frac{1}{4} e^{2x-3} + C$

P(1,5/1) soll auf Schaubild von F liegen: $F(1{,}5) = 1 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} e^{2 \cdot 1{,}5 - 3} + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} e^0 + C \Rightarrow C = 0{,}75$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $F(x) = \frac{1}{4} e^{2x-3} + 0{,}75$

Aufgabe 1-3:

$e^x + 24 \cdot e^{-x} = 11 \quad \Leftrightarrow e^x + 24 \cdot \frac{1}{e^x} = 11 \quad \overset{\cdot e^x}{\Leftrightarrow} e^{2x} + 24 = 11 \cdot e^x \quad \Leftrightarrow e^{2x} - 11 \cdot e^x + 24 = 0$

Substitution: $u = e^x$ (und damit ist $e^{2x} = u^2$)

Die Gleichung nach der Substitution lautet: $u^2 - 11u + 24 = 0$

Anwendung der Lösungsformel: $u_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 4 \cdot 24}}{2} = \frac{11 \pm 5}{2} \Rightarrow$ u = 8 oder u = 3

Rücksubstitution: $e^x = 8 \Leftrightarrow x_1 = \ln(8) \qquad e^x = 3 \Leftrightarrow x_2 = \ln(3)$

Aufgabe 1-4:

Es gilt: $f'(x) = 4ax^3 - 2bx + 5$ und $f''(x) = 12ax^2 - 2b$

Einsetzen von P(2/-3): $f(2) = -3 \Rightarrow 16a - 4b + 10 - c = -3 \Rightarrow 16a - 4b - c = -13$

Einsetzen von W(1/-5): $f(1) = -5 \Rightarrow a - b + 5 - c = -5 \Rightarrow a - b - c = -10$

Wendestelle bei x = 1: $f''(1) = 0 \Rightarrow 12a - 2b = 0$

Nun muss das lineare Gleichungssystem gelöst werden:

$$\begin{array}{rrrcrl} 16a & -4b & -c & = & -13 & (1) \\ a & -b & -c & = & -10 & (2) \\ 12a & -2b & & = & 0 & (3) \end{array} \qquad \begin{array}{c|rrrcrl} (1) & 16a & -4b & -c & = & -13 & (1) \\ (1)-1\cdot(2) & 15a & -3b & & = & -3 & (4) \\ (3) & 12a & -2b & & = & 0 & (3) \end{array}$$

$$\begin{array}{c|rrrcr} (1) & 16a & -4b & -c & = & -13 \\ (4) & 15a & -3b & & = & -3 \\ 2\cdot(4)-3\cdot(3) & -6a & & & = & -6 \end{array}$$

Aus der 3.Zeile folgt a = 1
Aus der 2.Zeile folgt b = 6
Aus der 1.Zeile folgt c = 5

Die gesuchte Funktion lautet $f(x) = x^4 - 6x^2 + 5x - 5$

Aufgabe 1-5:

a) Koordinaten der übrigen Punkte: B(4/6/0), D(4/0/5), E(4/6/5), F(0/6/5), M(4/6/2,5), N(0/6/2,5)

b) Die Ebene durch B, E und F ist parallel zur x_1x_3-Ebene.
Da die Punkte alle die x_2-Koordinaten 6 besitzen, lautet die Koordinatengleichung $x_2 = 6$

c) Gerade durch A und N: $\vec{x} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AN} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$

Gerade durch G und M: $\vec{x} = \overrightarrow{OG} + t \cdot \overrightarrow{GM} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ -2{,}5 \end{pmatrix}$

d) Ebenengleichung durch A(4/0/0), O(0/0/0) und E(4/6/5):

Parametergleichung: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$

Berechnung des Normalenvektors: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 24 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\overrightarrow{n^*} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung: $-5x_2 + 6x_3 = d$

Einsetzen des Ebenenpunktes O(0/0/0): $-5 \cdot 0 + 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow d = 0$

Koordinatengleichung der Ebene: $-5x_2 + 6x_3 = 0$

Aufgabe 1-6:

Da die Ebene F die Gerade g enthält, kann der Ortsvektor und der Richtungsvektor von g auch für die Ebene übernommen werden. Nun wird noch ein weiterer Richtungsvektor von F benötigt.
Da die Ebene F orthogonal zu E ist, ist der Normalenvektor von E ein weiterer Richtungsvektor von F.

Parameterform von E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0-2 \\ 2-(-2) \\ 1-5 \end{pmatrix}$ also E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. vereinfacht $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gleichung der Ebene F: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 1-7:

I) Der Term lautet $P(\text{alle 20 Zwiebeln keimen}) = 0{,}9^{20}$

II) Ereignis A: Der Term stellt die Summe der drei Wahrscheinlichkeiten dar, dass genau 18 Zwiebeln keimen oder genau 19 Zwiebeln keimen (da $\binom{20}{19} = 20$ ist) oder alle 20 Zwiebeln keimen.
Fazit: P(A) ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 18 Zwiebeln keimen.

Ereignis B: Der Term $0{,}1^{20}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass keine der 20 Zwiebeln keimt.
P(B) ist die Wahrscheinlichkeit des Gegenereignisses und somit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine Zwiebel keimt.