Hauptprüfung Abiturprüfung 2017

Baden-Württemberg

Teil 4 (mit Hilfsmittel)

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2017

1 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

1.1 Ein Unternehmen stellt aus den beiden Rohstoffen R1 und R2 die drei Zwischenprodukte Z1, Z2 und Z3 her. Aus den drei Zwischenprodukten entstehen die beiden Endprodukte E1 und E2.
Die benötigten Rohstoffe je Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Zwischenprodukte sowie die erforderlichen Zwischenprodukte zur Produktion je einer ME der Endprodukte sind in den nachfolgenden Tabellen angegeben.

Rohstoff-Zwischenprodukt

	Z1	Z2	Z3
R1	1	1	a
R2	2	1	1

Zwischen-Endprodukt

	E1	E2
Z1	1	0
Z2	0	2
Z3	2	1

Rohstoff-Endprodukt

	E1	E2
R1	5	4
R2	4	3

1.1.1 Zeigen Sie, dass a in der Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle den Wert 2 hat.
(2 Punkte)

1.1.2 Täglich werden 5 ME von E1 und 10 ME von E2 hergestellt.

1.1.2.1 Ein Mitarbeiter des Unternehmens behauptet, dass hierfür 65 ME von R1 und 50 ME von R2 benötigt werden. Überprüfen Sie die Behauptung.
(2 Punkte)

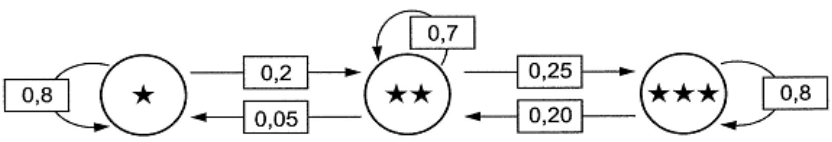
1.1.2.2 Betrachten Sie die Matrizen $D_1 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$, $D_3 = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$

Welche dieser drei Matrizen ist die Inverse der Rohstoff-Endproduktmatrix ?
Begründen Sie.

Aufgrund von Problemen in der Produktion wurden an einem Tag nur 43 ME von R1 und 33 ME von R2 verarbeitet.
Bestimmen Sie, wie viele ME von E1 und E2 an diesem Tag produziert wurden.
(5 Punkte)

1.2 Ein Institut prüft jährlich die Wasserqualität von Stränden in einer Urlaubsregion und vergibt hierfür ein bis drei Sterne. Ein Stern wird vergeben, wenn die Wasserqualität des Gewässers zum Baden ungeeignet ist. Bei zwei Sternen ist die Wasserqualität noch ausreichend, sodass Baden unbedenklich ist, und drei Sterne verweisen auf eine gute bis hervorragende Wasserqualität.

Das nachfolgende Diagramm beschreibt die Übergangswahrscheinlichkeiten für eine Zeiteinheit von einem Jahr.



Geben Sie die Übergangsmatrix an.
Berechnen Sie den prozentualen Anteil der zum Baden ungeeigneten Strände, der sich langfristig einstellt. (6 Punkte)

Lösungen

1.1.1 *Zeigen Sie, dass a in der Rohstoff-Zwischenprodukt-Tabelle den Wert 2 hat.*

Verwende die Formel $A \cdot B = C$

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $C = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$

Es gilt: $A \cdot B = C$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 2+a \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Ergebnismatrix stimmt mit C überein, wenn a = 2 ist.

1.2.1.1 *Ein Mitarbeiter des Unternehmens behauptet, dass hierfür 65 ME von R1 und 50 ME von R2 benötigt werden. Überprüfen Sie die Behauptung.*

Verwende die Formel $C \cdot \vec{p} = \vec{r}$

Der Produktionsvektor ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$

Erforderliche Rohstoffmenge: $C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 65 \\ 50 \end{pmatrix}$

Die Behauptung des Mitarbeiters stimmt.

1.1.2.2 *Welche dieser drei Matrizen ist die Inverse der Rohstoff-Endproduktmatrix ? Begründen Sie.*

Multipliziere die drei Matrizen mit der Matrix C und prüfe, ob die Einheitsmatrix als Ergebnis entsteht.

Prüfung, ob D_1 die Inverse von C ist: $D_1 \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}$

Dies kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag links oben eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob D_2 die Inverse von C ist: $D_2 \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & ... \\ ... & ... \end{pmatrix}$

Dies kann nicht die Inverse sein, da der Eintrag links oben eine „1“ ergeben müsste.

Prüfung, ob D_3 die Inverse von C ist: $D_3 \cdot C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

D_3 **ist die Inverse von C, da als Ergebnis die Einheitsmatrix entsteht.**

Bestimmen Sie, wie viele ME von E1 und E2 an diesem Tag produziert wurden.

Verwende die Formel $C \cdot \vec{p} = \vec{r} \Rightarrow \vec{p} = C^{-1} \cdot \vec{r}$

Der Rohstoffvektor ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Produktionsvektor $\vec{p}$.

$$C \cdot \vec{p} = \vec{r} \Rightarrow \vec{p} = C^{-1} \cdot \vec{r} = D_3 \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 43 \\ 33 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Von E1 wurden 3 ME und von E2 wurden 7 ME produziert.

1.2 *Geben Sie die Übergangsmatrix an.*

Die Übergangsmatrix kann man direkt aus den Werten des Diagramms bestimmen.

Übergangsmatrix: $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & 0{,}05 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}25 & 0{,}8 \end{pmatrix}$

Berechnen Sie den prozentualen Anteil der zum Baden ungeeigneten Strände, der sich langfristig einstellt.

Der langfristige Anteil ergibt sich aus der stationären Verteilung.
Bedingung: $A \cdot \vec{x} = \vec{x}$

Bedingung für stationäre Verteilung:

$$\begin{pmatrix} 0,8 & 0,05 & 0 \\ 0,2 & 0,7 & 0,2 \\ 0 & 0,25 & 0,8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1-x_1-x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1-x_1-x_2 \end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrcl} 0,8x_1 & +0,05x_2 & & = & x_1 \\ 0,2x_1 & +0,7x_2 & +0,2(1-x_1-x_2) & = & x_2 \\ & 0,25x_2 & +0,8(1-x_1-x_2) & = & 1-x_1-x_2 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcll} -0,2x_1 & +0,05x_2 & = & 0 & (1) \\ & -0,5x_2 & = & -0,2 & (2) \\ 0,2x_1 & +0,45x_2 & = & 0,2 & (3) \end{array}$$

Aus (2) folgt $x_2 = 0,4$
Aus (1) folgt $-0,2x_1 + 0,05 \cdot 0,4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0,1$
Test mit (3): $0,2 \cdot 0,1 + 0,45 \cdot 0,4 = 0,2$ liefert eine wahre Aussage
Daraus folgt $x_3 = 1 - x_1 - x_2 = 0,5$

Langfristig sind 10% der Strände zum Baden ungeeignet.