Hauptprüfung Abiturprüfung 2016 (ohne CAS)

Baden-Württemberg

Wahlteil Analytische Geometrie / Stochastik 2

Hilfsmittel: GTR und Formelsammlung

allgemeinbildende Gymnasien

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

April 2016

Aufgabe B 2.1:

Die Punkte A(0/-6/0), B(6/0/0), C(0/6/0) und S(0/0/5) sind die Eckpunkte der Pyramide ABCS. Der Punkt M_1 ist der Mittelpunkt der Kante AS und M_2 ist der Mittelpunkt der Kante CS. Die Ebene E verläuft durch M_1, M_2 und B.

a) Die Ebene E schneidet die Pyramide in einer Schnittfläche.
Stellen Sie Pyramide und Schnittfläche in einem Koordinatensystem dar.
Berechnen Sie den Umfang der Schnittfläche.
Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung von E.
(Teilergebnis: E: $5x_1 + 12x_3 = 30$)

(4 VP)

b) Der Punkt Q liegt auf der Kante BS und bildet mit M_1 und M_2 ein rechtwinkliges Dreieck.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q.

(3 VP)

c) Der Punkt Z liegt in der x_1x_3-Ebene und im Innern der Pyramide ABCS.
Er hat von der Grundfläche ABC, der Seitenfläche ACS und von E den gleichen Abstand.
Bestimmen Sie die Koordinaten von Z.

(3 VP)

Aufgabe B 2.2

Eine Tanzgruppe besteht aus 8 Anfängerpaaren und 4 Fortgeschrittenenpaaren. Aus der Erfahrung vergangener Jahre weiß man, dass Anfängerpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 90% bei den abendlichen Tanzstunden anwesend sind, Fortgeschrittenenpaare mit einer Wahrscheinlichkeit von 75%. Man geht davon aus, dass die Entscheidungen der Tanzpaare über die Teilnahme an der Tanzstunde voneinander unabhängig sind.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass an einem Abend mindestens 11 Paare anwesend sind ?

(5 VP)

Lösungen

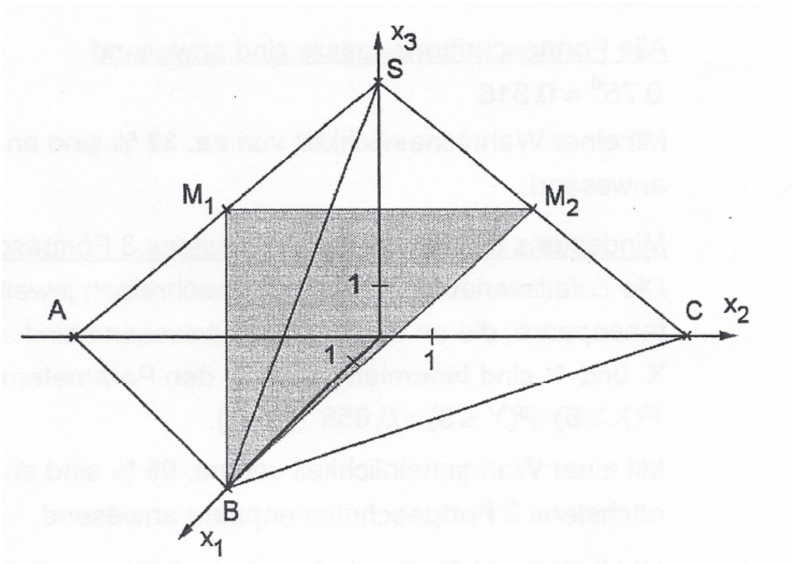
Aufgabe B 2.1:

a) Berechnung der beiden Mittelpunkte:

$$M_1\left(\frac{0+0}{2} / \frac{-6+0}{2} / \frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow M_1(0 / -3 / 2{,}5)$$

$$M_2\left(\frac{0+0}{2} / \frac{6+0}{2} / \frac{0+5}{2}\right) \Rightarrow M_2(0 / 3 / 2{,}5)$$

Darstellung der Pyramide und Schnittfläche im Koordinatensystem:



Umfang der Schnittfläche:

$$U = \overline{M_1M_2} + \overline{BM_1} + \overline{BM_2} = \left|\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-6\\-3\\2{,}5\end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix}-6\\3\\2{,}5\end{pmatrix}\right| = 6 + \sqrt{36+9+6{,}25} + \sqrt{36+9+6{,}25}$$

$$U = 6 + 2 \cdot \sqrt{51{,}25} = 20{,}32 \text{ LE}$$

Gleichung der Ebene E:
Parametergleichung der Ebene durch die Punkte M_1, M_2 und B:

$$E: \ \vec{x} = \begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-6\\-3\\2{,}5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-6\\3\\2{,}5\end{pmatrix}$$

Normalenvektor von N: $\vec{n} = \begin{pmatrix}-6\\-3\\2{,}5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}-6\\3\\2{,}5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-15\\0\\-36\end{pmatrix}$

Vereinfachung des Normalenvektors zu $\overrightarrow{n^*} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung von E: $5x_1 + 12x_3 = d$
Einsetzen von B(6/0/0) ergibt sich d = 30.

Koordinatengleichung von E: $5x_1 + 12x_3 = 30$

b) Gleichung der Gerade durch B und S: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

Der gesuchte Punkt Q, der auf g liegt, besitzt die allgemeinen Koordinaten $Q(6-6t\,/\,0\,/\,5t)$.

Man kann rein anschaulich erkennen, dass bei einem rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel nur im Punkt Q liegen kann.

Daher muss gelten: $\overrightarrow{M_1Q} \cdot \overrightarrow{M_2Q} = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 6-6t \\ 3 \\ 5t-2{,}5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6-6t \\ -3 \\ 5t-2{,}5 \end{pmatrix} = (6-6t)^2 - 9 + (5t-2{,}5)^2 = 0$$

Lösung der Gleichung mit dem GTR ergibt t = 0,5 oder t = 1,09.

Für t = 0,5 ergibt sich der Punkt Q(3/0/2,5).

Für t = 1,09 ergibt sich der Punkt Q(-0,54/0/5,45). Dieser liegt jedoch nicht auf der Kante BS, da der x_1-Wert negativ ist.

Daher ist der gesuchte Punkt Q(3/0/2,5).

c) Der Punkt Z liegt in der x_1x_3-Ebene, also ist die x_2-Koordinate 0.
Da er von der Grundfläche ABC und der Seitenfläche ACS den gleichen Abstand besitzt muss seine x_1- und x_3-Koordinate gleich groß sein
Somit hat Z die allgemeinen Koordinaten Z(a/0/a), wobei der Abstand zu der Seitenfläche und der Grundfläche jeweils a beträgt.

Daher muss der Abstand von Z zur Ebene E ebenfalls gleich a sein.

Hesse'sche Normalenform von E: $\dfrac{5x_1 + 12x_3 - 30}{\sqrt{25+144}} = 0$

Bedingung: $d(Z,E) = a$

Einsetzen von Z in die HNF: $\left|\frac{5a+12a-30}{13}\right| = a \quad \Rightarrow \left|\frac{17a-30}{13}\right| = a$

1.Fall: $\frac{17a-30}{13} = a \Rightarrow 17a-30 = 13a \Rightarrow a = 7,5$

2.Fall: $\frac{17a-30}{13} = -a \Rightarrow 17a-30 = -13a \Rightarrow a = 1$

Für a = 7,5 ergäbe sich der Punkt Z(7,5/0/7,5).
Für a = 1 ergäbe sich der Punkt Z(1/0/1).

Da der Punkt Z(7,5/0/7,5) außerhalb der Pyramide ABCS liegt, kommt als Punkt nur Z(1/0/1) in Frage.

Aufgabe B 2.2:

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der anwesenden Fortgeschrittenenpaare an.
X ist binomialverteilt mit n = 4 und p = 0,75.

Die Zufallsvariable Y gibt die Anzahl der anwesenden Anfängerpaare an,
Y ist binomialverteilt mit n = 8 und p = 0,90.

P(alle 4 Fortgeschrittenenpaare sind anwesend) = $P(X=4) = 0,75^4 = 0,316$

P(mindestens 6 Anfängerpaare und höchstens 3 Fortgeschrittenenpaare)
$= P(Y \geq 6) \cdot P(X \leq 3) = (1 - P(Y \leq 5)) \cdot P(X \leq 3) = 0,962 \cdot 0,684 = 0,658$ (GTR)

Mindestens 11 Paare sind anwesend wenn:
8 Anfängerpaare und 4 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind oder
8 Anfängerpaare und 3 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind oder
7 Anfängerpaare und 4 Fortgeschrittenenpaare anwesend sind

$$P(Y=8) \cdot P(X=4) + P(Y=8) \cdot P(X=3) + P(Y=7) \cdot P(X=4)$$
$$= 0,43 \cdot 0,316 + 0,43 \cdot 0,422 + 0,383 \cdot 0,316 = 0,438$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 11 Paare anwesend sind, beträgt ca. 44%.