

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2020

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 4 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

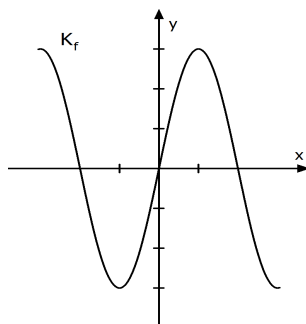
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \sin(2x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f .

- 4.1 Beschriften Sie die Achsen so, dass das Schaubild K_f zeigt. (3 Punkte)



- 4.2 Geben Sie die Koordinaten eines Wendepunktes von K_f mit negativer Steigung im Intervall $\left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ an. Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in diesem Wendepunkt. (7 Punkte)

- 4.3 Das Schaubild K_g der Funktion g mit $g(x) = 3 \cos(2x)$, $x \in \mathbb{R}$ schließt mit K_f und der y -Achse im ersten Quadranten eine Fläche ein.

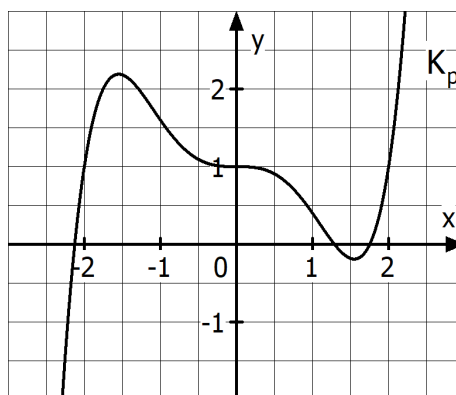
Zeigen Sie, dass sich K_f und K_g bei $x = \frac{\pi}{8}$ schneiden.

Berechnen Sie den Inhalt der beschriebenen Fläche. (7 Punkte)

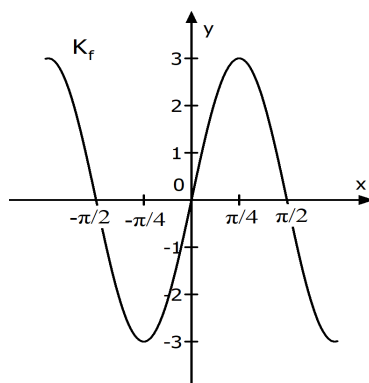
- 4.4 Eine zum Ursprung symmetrische Parabel 3. Ordnung schneidet die x -Achse in $x = \frac{1}{2}$ und hat im Ursprung dieselbe Steigung wie K_f . Bestimmen Sie einen Funktionsterm. (5 Punkte)

- 4.5 Gegeben ist das Schaubild K_p einer Polynomfunktion p . Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

- a) K_p gehört zu einer Polynomfunktion, welche mindestens 5. Grades ist.
- b) K_p hat genau zwei Wendepunkte im gezeichneten Abschnitt.
- c) $p'(0) > p'(1)$



- d) Die Gleichung $p(x) = 2$ hat im gezeichneten Abschnitt genau drei Lösungen. (8 Punkte)

Lösung**4.1 Beschriftete Skizze:**

Begründung y-Achse:

Die Amplitude ist $a = 3$. Damit besitzt der Hochpunkt den y-Wert 3.

Begründung x-Achse:

Die Periode des Schaubildes beträgt $p = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Daher befindet sich die erste positive Nullstelle bei $x = \frac{\pi}{2}$ und der Hochpunkt

bei $x = \frac{\pi}{4}$.

4.2 Die Wendestellen einer nicht in y-Richtung verschobenen Sinusfunktion entsprechen den Nullstellen der Funktion.

Nullstellen im Intervall $\left[\frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{4}\right]$: $x_1 = \pi$ und $x_2 = 1,5\pi$

Durch Fortsetzung des Schaubildes auf der rechten Seite kann man sich anschaulich klarmachen, dass bei $x_1 = \pi$ eine Wendestelle mit positiver Tangentensteigung befindet und bei $x_2 = 1,5\pi$ eine Wendestelle mit negativer Tangentensteigung.

Kontrolle durch Rechnung:

$$f'(x) = 3 \cos(2x) \cdot 2 = 6 \cos(2x)$$

$$\text{Steigung bei } x = \pi : f'(\pi) = 6 \cos(2\pi) = 6 > 0$$

$$\text{Steigung bei } x = 1,5\pi : f'(1,5\pi) = 6 \cos(3\pi) = -6 < 0$$

Mit $f(1,5\pi) = 3 \sin(3\pi) = 0$ ergibt sich als Wendepunkt $W(1,5\pi | 0)$.

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + c$

Einsetzen der Tangentensteigung $m = -6$ und der Koordinaten von W:

$$0 = -6 \cdot 1,5\pi + c \quad \Leftrightarrow c = 9\pi$$

$$\text{Tangentengleichung: } y = -6x + 9\pi$$

- 4.3 Nachweis, dass sich K_f und K_g bei $x = \frac{\pi}{8}$ schneiden:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2} \quad g\left(\frac{\pi}{8}\right) = 3 \cdot \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{8}\right) = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{2}$$

Damit gilt $f\left(\frac{\pi}{8}\right) = g\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

Linke Integralgrenze: $x = 0$, da die Fläche bei der y-Achse beginnt.

Rechte Integralgrenze: $x = \frac{\pi}{8}$

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{8}} (g(x) - f(x)) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{8}} (3 \cos(2x) - 3 \sin(2x)) dx = \left[\frac{3}{2} \sin(2x) + \frac{3}{2} \cos(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{8}} \\ &= \frac{3}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{3}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \left(\frac{3}{2} \sin(0) + \frac{3}{2} \cos(0) \right) \approx 0,62 \end{aligned}$$

Der Inhalt der Fläche beträgt $A \approx 0,62$ FE

Hinweis: Das Integral $\int_0^{\frac{\pi}{8}} (f(x) - g(x)) dx$ hat als Ergebnis $-0,62$.

Daraus ergibt sich für den Flächeninhalt jedoch dasselbe Ergebnis.

- 4.4 Ansatz für die Funktion 3.Grades: $h(x) = ax^3 + bx$ mit $h'(x) = 3ax^2 + b$ (nur ungerade Hochzahlen, da das Schaubild von h symmetrisch zum Ursprung ist)

Steigung von K_f im Ursprung: $f'(0) = 6 \cos(2 \cdot 0) = 6$

Bedingungen für die Funktion h :

Gleiche Steigung im Ursprung wie K_f : $h'(0) = 6$: $3a \cdot 0^2 + b = 6 \Rightarrow b = 6$

Schnitt der x-Achse bei $x = \frac{1}{2}$: $h\left(\frac{1}{2}\right) = 0$: $a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 + b \cdot \frac{1}{2} = 0$
 $\Rightarrow \frac{1}{8}a + 6 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow a = -24$

Funktionsterm: $h(x) = -24x^3 + 6x$

- 4.5 a) Die Aussage ist wahr, da K_p einen Sattelpunkt und zwei Extrempunkte besitzt.
 Andere Begründung: Wenn man K_p um eine Einheit nach unten verschiebt, hat die Funktion eine dreifache Nullstelle (Sattelpunkt) und zwei einfache Nullstellen.
- b) Die Aussage ist falsch. K_p hat drei Wendestellen bei $x = 0$ und $x \approx -1$ und $x \approx 1$

- c) Die Aussage ist wahr. $p'(0) = 0$ (waagrechte Tangente im Sattelpunkt)
 $p'(1) < 0$ (Steigung der Tangente an K_p bei $x = 1$ ist negativ)
- d) Die Aussage ist wahr. Die Gleichung $p(x) = 2$ kann anschaulich als Schnitt zwischen K_p und der waagrechten Gerade $y = 2$ interpretiert werden.
Die Gerade schneidet K_p bei $x_1 \approx -1,7$ und $x_2 \approx -1,3$ und $x_3 \approx 2,1$.