

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2020

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = 0,5e^{0,5x} - x + 1,5$, $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_h .

3.1 Zeichnen Sie K_h für $-2 \leq x \leq 5$. (3 Punkte)

3.2 Berechnen Sie die Koordinaten des Extrempunktes von K_h .

Das Schaubild K_h soll verschoben werden:

a) in y -Richtung, so dass das Schaubild durch den Ursprung verläuft,

b) so, dass der Extrempunkt im Ursprung liegt.

Geben Sie jeweils einen neuen Funktionsterm an. (8 Punkte)

3.3 Prüfen Sie, ob die Tangente an K_h in $x = 3$ einen positiven y -Achsenabschnitt hat. (4 Punkte)

Vom Schaubild K_f der Funktion f mit $f(x) = 2\cos(bx) + d$, $x \in \mathbb{R}$, ist bekannt, dass der Punkt $P(3|3)$ auf K_f liegt.

3.4 Bestimmen Sie jeweils b und d so,
a) dass K_f in P einen Hochpunkt hat.
b) dass K_f in P einen Tiefpunkt hat. (4 Punkte)

Sei ab jetzt $b = \frac{\pi}{2}$ und $d = -1$.

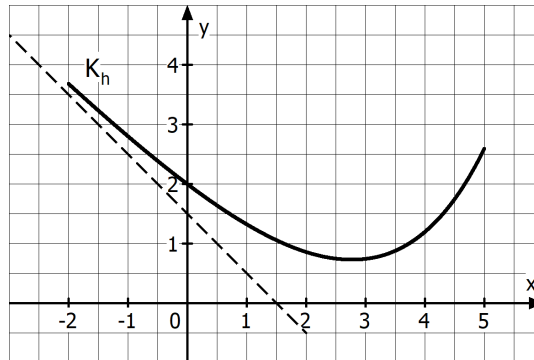
3.5 Bestimmen Sie die ersten beiden positiven Nullstellen von f .
Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die K_f mit der x -Achse zwischen diesen beiden Nullstellen einschließt. (8 Punkte)

3.6 Bestimmen Sie einen x -Wert so, dass der Funktionswert der Funktion d mit $d(x) = h(x) - f(x)$, $x \in \mathbb{R}$ kleiner als 0,2 ist. (3 Punkte)

Lösung**3.1** Zeichnung von K_h mithilfe der Wertetabelle des WTR:

Hinweis: K_h besitzt für $x \rightarrow -\infty$ die schiefe Asymptote $y = -x + 1,5$.

Zur Hilfestellung ist diese Gerade gestrichelt mit eingezeichnet.



3.2 $h(x) = 0,5e^{0,5x} - x + 1,5$

Ableitungen von h :

$$h'(x) = 0,5 \cdot e^{0,5x} \cdot 0,5 - 1 = 0,25e^{0,5x} - 1$$

$$h''(x) = 0,25 \cdot e^{0,5x} \cdot 0,5 = 0,125e^{0,5x}$$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

$$h'(x) = 0: 0,25e^{0,5x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{0,5x} = 4 \Leftrightarrow 0,5x = \ln(4) \Leftrightarrow x = 2 \cdot \ln(4)$$

$$h''(2 \cdot \ln(4)) = 0,125 \cdot e^{0,5 \cdot 2 \cdot \ln(4)} = 0,5 > 0$$

An der Stelle $x = 2 \cdot \ln(4)$ existiert ein Tiefpunkt.

$$\text{Wegen } h(2 \cdot \ln(4)) = 0,5 \cdot e^{0,5 \cdot 2 \cdot \ln(4)} - 2 \ln(4) + 1,5 = 3,5 - 2 \cdot \ln(4) \approx 0,727$$

Koordinaten des Tiefpunktes: $T(2 \cdot \ln(4) | 3,5 - 2 \cdot \ln(4))$ bzw. $T(2,773 | 0,727)$

a) Das Schaubild K_h schneidet die y -Achse im Punkt $A(0|2)$.

Es muss um 2 Einheiten nach unten verschoben werden, damit es durch den Ursprung verläuft.

$$h_1(x) = h(x) - 2 = 0,5e^{0,5x} - x + 1,5 - 2 = 0,5e^{0,5x} - x - 0,5$$

b) Aufgrund der Tiefpunktkoordinaten muss das Schaubild K_h um $2 \cdot \ln(4)$ nach links und um $3,5 - 2 \ln(4)$ nach unten verschoben werden.

$$\begin{aligned} h_2(x) &= h(x + 2 \ln(4)) - (3,5 - 2 \ln(4)) \\ &= 0,5e^{0,5(x + 2 \ln(4))} - (x + 2 \ln(4)) + 1,5 - 3,5 + 2 \ln(4) \\ &= 0,5e^{0,5(x + 2 \ln(4))} - x - 2 \end{aligned}$$

Wenn man mit gerundeten Koordinaten arbeitet muss das Schaubild K_h um 2,773 nach links und um 0,727 nach unten verschoben werden.

$$\begin{aligned} h_2(x) &= h(x + 2,773) - 0,727 = 0,5e^{0,5(x+2,773)} - (x + 2,773) + 1,5 - 0,727 \\ &= 0,5e^{0,5(x+2\ln(4))} - x - 2 \end{aligned}$$

3.3 Aufstellen der Tangentengleichung an der Stelle $x = 3$:

Steigung der Tangente: $h'(3) = 0,25e^{0,5 \cdot 3} - 1 \approx 0,12 = m$

Berechnung des Berührungpunktes B der Tangente:

$$h(3) = 0,5e^{0,5 \cdot 3} - 3 + 1,5 \approx 0,74 \quad \text{also } B(3|0,74)$$

Ansatz für die Tangentengleichung: $y = mx + c \quad (*)$

Einsetzen der Steigung m und des Punktes B in $(*)$

$$0,74 = 0,12 \cdot 3 + c \quad c = 0,38 > 0$$

Damit ist gezeigt, dass der y-Achsenabschnitt $c > 0$ ist.

3.4 $f(x) = 2\cos(bx) + d$

a) $P(3|3)$ ist ein Hochpunkt von K_f .

Es gilt $y_{\max} = 3$ und Amplitude $a = 2$.

d entspricht der Höhe der waagrechten „Mittellinie“ des Schaubildes.

Daraus folgt $d = y_{\max} - a = 3 - 2 = 1$.

K_f besitzt als Kosinusfunktion an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt.

Da bei $x = 3$ ebenfalls ein Hochpunkt liegt, ist die Periode $p = 3$.

$$\text{Daraus folgt } b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{3}.$$

b) $P(3|3)$ ist ein Tiefpunkt von K_f .

Es gilt $y_{\min} = 3$ und Amplitude $a = 2$.

d entspricht der Höhe der waagrechten „Mittellinie“ des Schaubildes.

Daraus folgt $d = y_{\min} + a = 3 + 2 = 5$.

K_f besitzt als Kosinusfunktion an der Stelle $x = 0$ einen Hochpunkt.

Da bei $x = 3$ ein Tiefpunkt liegt, ist die halbe Periode 3, also $p = 6$.

$$\text{Daraus folgt } b = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

3.5 $f(x) = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1$

Bedingung für Nullstellen: $f(x) = 0$

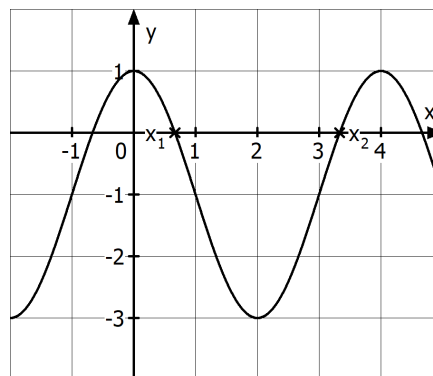
$$2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) = 0,5$$

Mit dem WTR folgt: $\cos^{-1}(0,5) = \frac{\pi}{3}$

1.Lösung: $\frac{\pi}{2}x = \frac{\pi}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{2}{3}$

2.Lösung: $\frac{\pi}{2}x = 2\pi - x_1 = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5}{3}\pi \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = \frac{10}{3}$

Skizze von K_f (ist nicht Bestandteil der Aufgabe)



Die Berechnung der Fläche erfolgt mit Hilfe eines Integrals:

$$\int_{x_1}^{x_2} (2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1)dx = \left[2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \cdot \frac{2}{\pi} - x \right]_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} = \frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) - \frac{10}{3} - \left(\frac{4}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \frac{2}{3} \right)$$

$$\approx -1,102 - \frac{10}{3} - \left(1,102 - \frac{2}{3} \right) \approx -4,87$$

Da sich das Flächenstück unterhalb der x-Achse befindet, wird das Integral negativ.

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt $A \approx 4,87$ FE.

3.6 Es gilt $d(x) = h(x) - f(x) = 0,5e^{0,5x} - x + 1,5 - (2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1)$

Gesucht ist ein x-Wert, für den gilt: $d(x) < 0,2$

$$0,5e^{0,5x} - x + 1,5 - (2\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) - 1) < 0,2$$

Dieser x-Wert kann nur mit Hilfe des WTR bestimmt werden.

Hier gibt man in den WTR die Funktionsgleichung von $d(x)$ ein und lässt sich eine Wertetabelle ausgeben (am besten zunächst eine Standardwertetabelle im Bereich von $x = -5$ bis $x = 5$ und der Schrittweite 1).

Ergebnis der Wertetabelle:

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
d(x)	7,54	4,57	5,61	6,68	3,80	1	2,32	3,86	1,74	0,19	3,59

Für $x = 4$ gilt $d(4) = 0,19 < 0,2$.

Hinweis:

Falls man in der Wertetabelle keinen Wert $< 0,2$ finden sollte, müssten man mit anderen x-Werten auf die Suche gehen.