

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2020

Baden-Württemberg

Wahlteil: Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: Merkhilfe und WTR

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild ist K_f .

2.1 Berechnen Sie die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte von K_f .

Zeichnen Sie K_f für $-3 \leq x \leq 2$. (9 Punkte)

2.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente an K_f im Punkt $P(2|f(2))$

und die Koordinaten des Schnittpunktes dieser Tangente mit der x -Achse. (4 Punkte)

Gegeben ist das Schaubild K_g einer Funktion g .

2.3 Markieren Sie im Schaubild (siehe Lösungsblatt) zwei Werte für u mit

$u \geq -1$, welche die Gleichung $\int_{-1}^u g(x) dx = 11$ näherungsweise lösen.

Erläutern Sie Ihr Vorgehen. (4 Punkte)

Ein Unternehmen produziert Betriebssysteme für Smartphones.

Alle Smartphone-Besitzer können diese Betriebssysteme nutzen.

Im September 2019 veröffentlichte das Unternehmen das Betriebssystem 4.0

als Nachfolger des Betriebssystems 3.0.

Weitere Betriebssysteme sind ebenfalls am Markt und werden genutzt.

Die Funktion g mit $g(t) = -80 \cdot e^{-0,023 \cdot t} + 80$, $t \geq 0$

beschreibt durch $g(t)$ den Anteil der 4.0-Nutzer in Prozent zum Zeitpunkt t .

Dabei ist t die Zeit in Tagen, $t = 0$ entspricht dem 1. September 2019.

2.4 Skizzieren Sie das Schaubild von g .

Wie viel Prozent der Smartphone-Besitzer werden niemals 4.0 nutzen?

Ermitteln Sie den Anteil der 4.0-Nutzer nach 60 Tagen.

Zu welchem Zeitpunkt hat die Hälfte der Smartphone-Besitzer 4.0

installiert? (8 Punkte)

2.5 Die Funktion h mit $h(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 15$, $t \geq 0$, $a, b \neq 0$

beschreibt durch $h(t)$ den Anteil der 3.0-Nutzer in Prozent zum Zeitpunkt t .

Dabei ist t die Zeit in Tagen, $t = 0$ entspricht dem 1. September 2019.

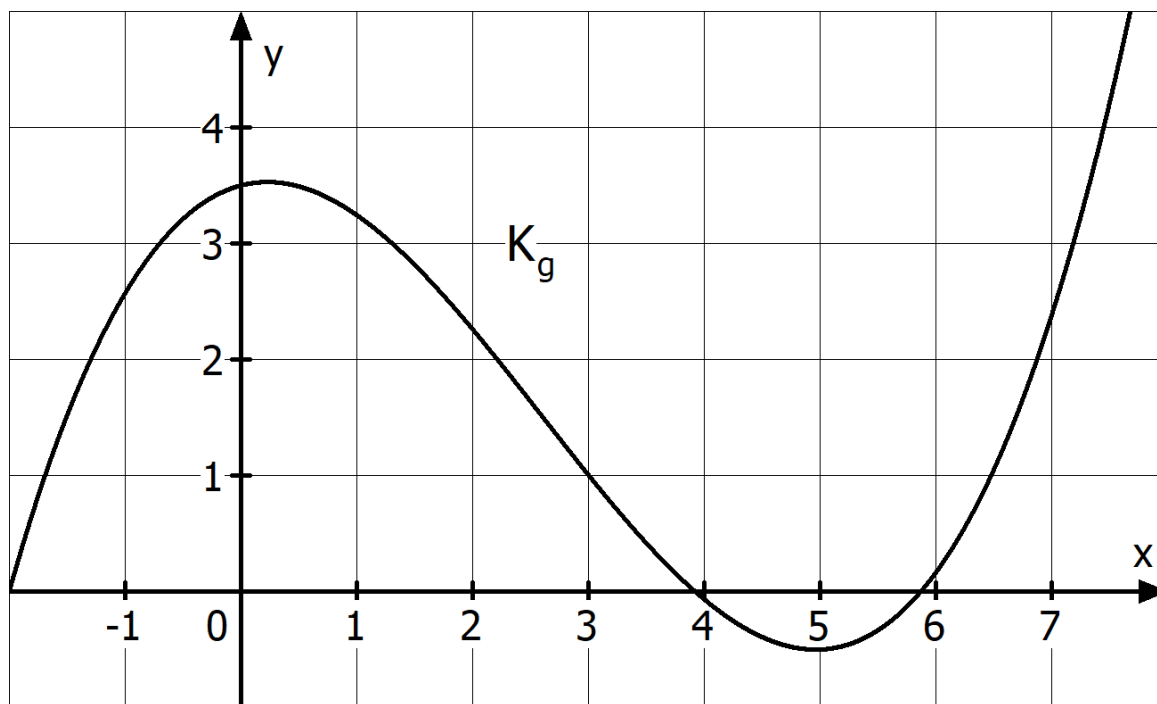
- 75% der Smartphone-Besitzer verwendeten 3.0 zum Zeitpunkt $t = 0$.

- 30 Tage nach der Einführung von 4.0 war der Nutzeranteil beider Betriebssysteme gleich.

Bestimmen Sie die Werte für a und b . (5 Punkte)

Lösungsblatt zu Aufgabe 2.3:

Gegeben ist das Schaubild K_g einer Funktion g . Markieren Sie im Schaubild zwei Werte für u mit $u \geq -1$, welche die Gleichung $\int_{-1}^u g(x) dx = 11$ näherungsweise lösen.



Erläuterung des Vorgehens:

Lösung

$$2.1 \quad f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2$$

Ableitungen von f:

$$f'(x) = x^3 + x^2 - 2x$$

$$f''(x) = 3x^2 + 2x - 2$$

Hinreichende Bedingung für Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(x) = 0: x^3 + x^2 - 2x = 0$$

$$x \cdot (x^2 + x - 2) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x_1 = 0$$

$$\text{Gleichung II): } x^2 + x - 2 = 0$$

$$x_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2}, \text{ also } x_2 = 1 \text{ und } x_3 = -2$$

$$f''(0) = -2 < 0: \text{ Bei } x = 0 \text{ existiert ein Hochpunkt.}$$

$$f(0) = 0: \text{ Hochpunkt } H(0|0)$$

$$f''(1) = 3 > 0: \text{ Bei } x = 1 \text{ existiert ein Tiefpunkt.}$$

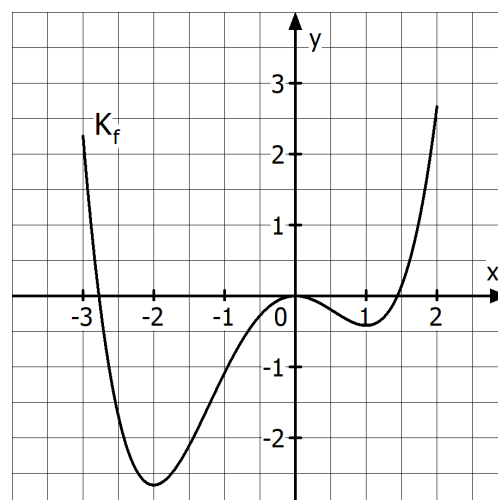
$$f(1) = -\frac{5}{12}: \text{ Tiefpunkt } T_1(1 | -\frac{5}{12})$$

$$f''(-2) = 6 > 0: \text{ Bei } x = -2 \text{ existiert ein Tiefpunkt.}$$

$$f(-2) = -\frac{8}{3}: \text{ Tiefpunkt } T_2(-2 | -\frac{8}{3})$$

Zeichnung:

Für die Zeichnung sollten die berechneten Extrempunkte sowie die Wertetabelle des WTR genutzt werden.



2.2 Gleichung der Tangente im Punkt $P(2|f(2))$.

Allgemeiner Ansatz für die Tangente: $y = mx + c$ (*)

Steigung der Tangente: $f'(2) = 8$

Berechnung des y-Wertes von P: $f(2) = \frac{8}{3}$, also $P(2 | \frac{8}{3})$

Einsetzen der Steigung und des Punktes P in den Ansatz (*):

$$\frac{8}{3} = 8 \cdot 2 + c \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{40}{3}$$

Gleichung der Tangente in P: $y = 8x - \frac{40}{3}$

Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse: Setze $y = 0$

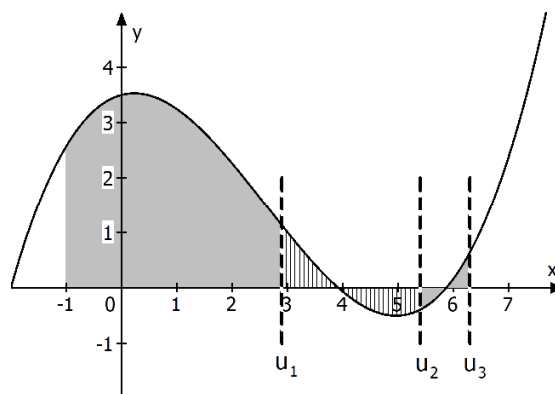
$$0 = 8x - \frac{40}{3} \quad | + \frac{40}{3}$$

$$\Leftrightarrow 8x = \frac{40}{3} \quad | :8$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} ; \text{ der Schnittpunkt lautet } S(\frac{5}{3} | 0).$$

- 2.3 Gesucht ist eine Stelle u , so dass in den Grenzen $x = -1$ und $x = u$ zwischen dem Schaubild K_g und der x-Achse ein *orientierter* Flächeninhalt von 11 FE entsteht (orientiert bedeutet, dass Flächeninhalte oberhalb der x-Achse positiv und unterhalb der x-Achse negativ in die Integralberechnung eingehen).

Aufgrund der Skalierung in der Skizze gilt: 1 FE = 1 Kästchen.



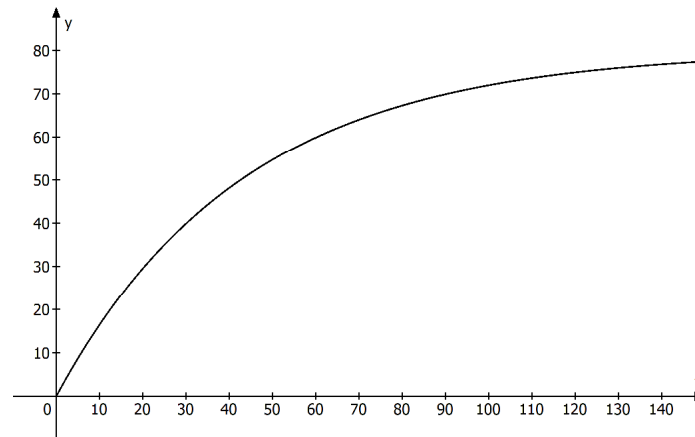
Es gibt insgesamt 3 mögliche Lösungen für u .

Für $u_1 \approx 2,9$ beträgt der Inhalt der linken grauen Fläche 11 FE.

Für $u_2 \approx 5,4$ ist der Inhalt der linierten Fläche oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß. Daher ist der Wert des Integrals für diesen u -Wert 11.

Für $u_3 \approx 6,3$ ist der Inhalt der grauen Fläche unterhalb und oberhalb der x-Achse gleich groß. Daher ist der Wert des Integrals für diesen u -Wert 11.

2.4 Skizze des Schaubildes (mithilfe der Wertetabelle des WTR):



Der y-Wert der Funktion g sagt aus, wie viel % 4.0-Nutzer vorhanden sind. Sowohl anhand der Skizze als auch an der Funktionsgleichung kann man erkennen, dass $y = 80$ die waagrechte Asymptote der Funktion ist. Das bedeutet, dass der Anteil der 4.0-Nutzer nicht über 80% steigen wird. Das heißt umgekehrt, dass 20% der Nutzer niemals 4.0 nutzen werden.

Anteil der 4.0-Nutzer nach 60 Tagen: $g(60) = -80 \cdot e^{-0,023 \cdot 60} + 80 \approx 59,87 \%$

Der Anteil der 4.0-Nutzer nach 60 Tagen beträgt ca. 60%.

Zeitpunkt, bei dem 50% das System 4.0 verwenden:

Bedingung: $g(t) = 50$

$$\begin{aligned}
 -80 \cdot e^{-0,023 \cdot t} + 80 &= 50 && | -80 \\
 \Leftrightarrow -80 \cdot e^{-0,023 \cdot t} &= -30 && | :(-80) \\
 \Leftrightarrow e^{-0,023 \cdot t} &= \frac{3}{8} && | \ln \\
 \Leftrightarrow -0,023 \cdot t &= \ln\left(\frac{3}{8}\right) && | :(-0,023) \\
 \Leftrightarrow t &\approx 42,64
 \end{aligned}$$

Am 13. Oktober hat die Hälfte der Nutzer 4.0 installiert.

2.5 $h(t) = a \cdot e^{b \cdot t} + 15$

Bedingungen:

$$h(0) = 75: a \cdot e^0 + 15 = 75 \quad \Leftrightarrow a = 60$$

Anteil der 4.0-Nutzer nach 30 Tagen: $g(30) \approx 39,87$

$$\begin{aligned}
 h(30) = 39,87: 60 \cdot e^{b \cdot 30} + 15 &= 39,87 \\
 \Leftrightarrow 60 \cdot e^{b \cdot 30} &= 24,87 \\
 \Leftrightarrow e^{b \cdot 30} &= 0,4145 \\
 \Leftrightarrow b &= \frac{\ln(0,4145)}{30} \approx -0,0294
 \end{aligned}$$