

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie, Matrizenrechnung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Analysis

- 1.1 Geben Sie die Nullstellen des Polynoms p mit $p(x) = x^3 - 100x$; $x \in \mathbb{R}$ an.
Erstellen Sie ohne weitere Rechnung eine Skizze des Schaubilds von p .

(4 Punkte)

- 1.2 Die folgende Tabelle enthält Funktionswerte und Werte der ersten beiden Ableitungen einer Polynomfunktion h vom Grad 4. Das Schaubild von h ist K .

x	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5
$h(x)$	2,375	-2	-1,625	-1	-1,625	-2	2,375
$h'(x)$	-18	-2	2	0	-2	2	18
$h''(x)$	48	18	0	-6	0	18	48

Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind und begründen Sie Ihre Entscheidungen ohne Funktionsterme zu berechnen.

- (1) $P(-1|2)$ liegt auf K .
(2) K besitzt zwei Wendepunkte.
(3) K besitzt drei Punkte mit waagrechter Tangente.

(6 Punkte)

- 1.3 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)$; $x \in \mathbb{R}$.

- 1.3.1 Geben Sie zwei benachbarte Wendepunkte des Schaubildes von f an.

(3 Punkte)

- 1.3.2 Ermitteln Sie einen Wert für $b > 10$, für den gilt: $\int_1^b f(x) dx = 0$.

(2 Punkte)

Stochastik

- 2 Ein Glücksrad besteht aus drei Sektoren unterschiedlicher Größe.

Der rote Sektor nimmt die Hälfte des Glücksrads ein, der weiße Sektor ein Drittel und der grüne Sektor den Rest.

Dreht man das Glücksrad, so zeigt beim Stillstand ein Pfeil auf genau einen der drei Sektoren.

- 2.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des folgenden Ereignisses:
A: Bei viermaligem Drehen zeigt der Pfeil genau einmal auf den weißen Sektor.

(2 Punkte)

- 2.2 Geben Sie im Sachzusammenhang ein Ereignis B mit der Wahrscheinlichkeit

$$P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \text{ an.} \quad (2 \text{ Punkte})$$

- 2.3 Bei einem Spiel wird das Glücksrad einmal gedreht. Der Einsatz beträgt 2 Euro.

Zeigt der Pfeil auf den roten Sektor, so erhält man keine Auszahlung.

Zeigt der Pfeil auf den weißen Sektor, so beträgt die Auszahlung 2 Euro.

Zeigt der Pfeil auf den grünen Sektor erhält man den Hauptgewinn.

Bestimmen Sie, wie hoch beim Hauptgewinn die Auszahlung sein muss, damit es sich um ein faires Spiel handelt.

(3 Punkte)

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 3 Gegeben sind die Punkte $A(1|-1|2)$ und $B(-1|-3|4)$ sowie der Punkt $M(0|-2|3)$, der auf der Gerade g durch A nach B liegt.
Die Ebene E ist gegeben durch $E: -x_1 - x_2 + x_3 = 5$.
- 3.1 Zeigen Sie, dass E den Punkt M enthält und dass E orthogonal zu g ist. (3 Punkte)
- 3.2 Vom Punkt $C(3|1|0)$ ist bekannt, dass er auf g liegt.
Bestimmen Sie den Punkt D auf g (mit $D \neq C$), der von M den gleichen Abstand wie C hat. (2 Punkte)
- 3.3 Begründen Sie, dass für jeden Punkt P von E gilt: $|\overline{PA}| = |\overline{PB}|$. (3 Punkte)

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

- 3.1 Betrachtet werden die Matrizen A, B, C und D.
A hat 3 Zeilen und 7 Spalten, d.h. das Format von A ist 3×7 .
B hat das Format 7×2 und $D = A \cdot B \cdot C$ hat das Format 3×4 .

Geben Sie das Format der Matrix C an. (2 Punkte)

- 3.2 Betrachtet wird eine Matrix Q und ihre Inverse $R = Q^{-1}$.
Vereinfachen Sie den Term
 $(R \cdot Q \cdot (4 \cdot Q) - 2 \cdot Q \cdot R \cdot Q) \cdot R$
so weit wie möglich.

(2 Punkte)

- 3.3 Gegeben sind die Matrizen

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad Z = \begin{pmatrix} 9 & b^2 \\ 12 & 11 \end{pmatrix} \quad \text{mit } a, b, c \in \mathbb{R}$$

Es gilt $Z = X \cdot Y$.

Bestimmen Sie alle möglichen Werte für a, b und c.

Geben Sie die Anzahl der Lösungen der Form (a;b;c) an.

(4 Punkte)

Lösungen**Analysis**

1.1 Bedingung für Nullstellen: $f(x) = 0$

$$x^3 - 100x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 100) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } x^2 = 100 \Rightarrow x = \pm 10$$

Die Funktion besitzt 3 Nullstellen: $x = 0$ und $x = 10$ und $x = -10$

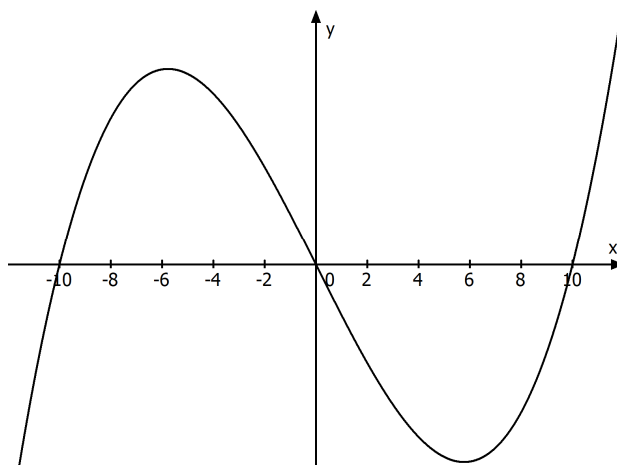
Skizze des Schaubildes:

Hinweis zur Skizze:

Schaubild ist symmetrisch zum Ursprung (nur ungerade Hochzahlen)

Das Schaubild besitzt 3 einfache Nullstellen.

Außerdem gilt: Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $f(x) \rightarrow +\infty$



1.2. (1) Die Aussage ist falsch. Es gilt $h(-1) = -2$, also liegt $P(-1|2)$ nicht auf K .

(2) Die Aussage ist wahr. Es gilt $h''(-0,5) = 0$ und $h''(0,5) = 0$.

Die zweite Ableitung hat zwei Nullstellen mit einem Vorzeichenwechsel.

Daher hat das Schaubild an diesen Stellen Wendepunkte.

Weitere Wendepunkte existieren nicht, da eine Polynomfunktion 4. Grades maximal 2 Wendepunkte haben kann.

(3) Die Aussage ist wahr.

Bedingung für eine waagrechte Tangente: $h'(x) = 0$

$$\text{Es gilt } h'(0) = 0$$

Da $h'(-1) = -2 < 0$ und $h'(-0,5) = 2 > 0$ gilt, gibt es eine Stelle im Intervall $[-1; -0,5]$, bei der die erste Ableitung Null wird.

Da $h'(0,5) = -2 < 0$ und $h'(1) = 2 > 0$ gilt, gibt es eine Stelle im Intervall $[0,5; 1]$, bei der die erste Ableitung Null wird.

$$1.3.1 \quad f(x) = 3 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right)$$

Bei einer allgemeinen trigonometrischen Funktion $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ haben die Wendepunkte den y-Wert d.

Da bei der gegebenen Funktion $d = 0$ ist, sind die Wendepunkte von f die Schnittpunkte mit der x-Achse.

Bedingung für Schnittpunkt mit x-Achse: $f(x) = 0$

$$3 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right) = 0 \quad | : 3$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right)\right) = 0$$

Es gilt $\sin(0) = 0$

$$\text{Bedingung: } 2 \cdot \left(x + \frac{\pi}{12}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12}, \text{ also } W_1\left(-\frac{\pi}{12} \mid 0\right)$$

Die weiteren Nullstellen haben den Abstand einer halben Periode.

$$\text{Periode des Schaubildes von f: } p = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$\text{Der nächste Wendepunkt hat den x-Wert } x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} = \frac{5}{12}\pi, \text{ also } W_2\left(\frac{5}{12}\pi \mid 0\right)$$

- 1.3.2 Bei einer periodischen Funktion, die um die x-Achse oszilliert (das heißt $d = 0$) ergibt das Integral Null wenn über eine oder mehrere Perioden integriert wird. Begründung: Die Flächenstücke unterhalb und oberhalb der x-Achse sind gleich groß.

Die Funktion f hat die Periode $p = \pi$.

$$\text{Also gilt: } \int_1^{1+\pi} f(x) dx = 0 \text{ bzw. } \int_1^{1+2\pi} f(x) dx = 0 \text{ bzw. } \int_1^{1+3\pi} f(x) dx = 0$$

Da $b > 10$ ist, gilt $b = 1 + 3\pi$

Stochastik

$$\begin{aligned}
2 \quad & P(\text{weißer Sektor wird gedreht}) = \frac{1}{3} \\
& P(\text{roter Sektor wird gedreht}) = \frac{1}{2} \\
& P(\text{grüner Sektor wird gedreht}) = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.1 \quad & P(\text{weißer Sektor wird gedreht}) = \frac{1}{3} \\
& P(\text{es wird nicht der weiße Sektor gedreht}) = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ kann mit Hilfe der Binomialverteilung bestimmt werden.
 X = Anzahl der Drehungen, bei denen weiß auftritt.

X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = \frac{1}{3}$.

$$P(A) = P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{8}{27} = \frac{32}{81} \quad (\text{Formel von Bernoulli})$$

Hinweis:

$P(A)$ kann auch ohne Binomialverteilung berechnet werden mit Hilfe eines Baumdiagramms (es wird unterschieden zwischen „weiß“ und „nicht weiß“):

$$P(A) = P(\overline{w}w\overline{w}w) + P(\overline{w}w\overline{w}\overline{w}) + P(\overline{w}w\overline{w}w) + P(\overline{w}w\overline{w}\overline{w}) = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{81}$$

$$2.2 \quad P(B) = 3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

Die Zahl $\frac{1}{6}$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der der grüne Sektor gedreht wird.

Die Zahl $\frac{5}{6}$ stellt die Wahrscheinlichkeit dar, mit der „nicht grün“ gedreht wird.

Der Term $\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass zweimal der grüne Sektor und zweimal nicht der grüne Sektor gedreht wird – und zwar in einer konkreten Reihenfolge.

Der Term $3 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2$ lässt nun 3 verschiedene Reihenfolgen zu.

Mögliches Ereignis B:

Bei viermaligem Drehen entsteht eines der folgenden 3 Ergebnisse:

- 1.) grün, grün, nichtgrün, nichtgrün
- 2.) grün, nichtgrün, grün, nichtgrün
- 3.) grün, nichtgrün, nichtgrün, grün

2.3 Die Zufallsvariable X sei die Auszahlung an den Spieler in Euro.

$$P(X=0) = P(\text{rot}) = \frac{1}{2}$$

$$P(X=2) = P(\text{weiß}) = \frac{1}{3}$$

$$P(X=a) = P(\text{grün}) = \frac{1}{6} \quad a = \text{Höhe des Hauptgewinns}$$

Ein faires Spiel liegt vor, wenn $E(X) = \text{Einsatz}$ ist.

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{3} + a \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}a$$

Bedingung: $E(X) = 2$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6}a = 2 \quad \Leftrightarrow \frac{1}{6}a = \frac{4}{3} \quad \Leftrightarrow a = 8$$

Die Auszahlung für den Hauptgewinn muss 8 Euro betragen.

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3.1 Nachweis, dass $M(0|-2|3)$ in der Ebene E liegt:

Einsetzen von M in die Ebenengleichung:

$-0 - (-2) + 3 = 5$ ergibt eine wahre Aussage

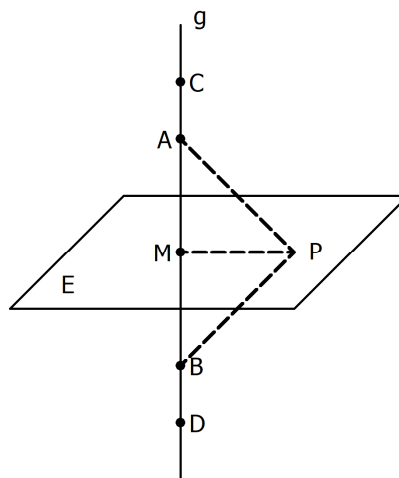
Damit liegt M in E .

Gleichung der Gerade g durch A und B : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die Gerade ist orthogonal zu E , wenn der Richtungsvektor von g ein Vielfaches ist zum Normalenvektor von E .

Der Vektor $\vec{n}_E = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist ein Vielfaches zum Richtungsvektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ von g .

3.2 Skizze:



Der Punkt $C(3|1|0)$ liegt auf der Geraden g .

Der Punkt D ergibt sich durch eine Spiegelung des Punktes C an der Ebene E .

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + 2 \cdot \overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von D lauten $D(-3|-5|6)$.

3.3 Die Strecke AB besitzt den Mittelpunkt M.

Überprüfung mit Hilfe der Mittelpunktsformel: $M_{AB}(\frac{1+(-1)}{2} | \frac{-1-3}{2} | \frac{2+4}{2})$

$M_{AB}(0 | -2 | 3)$ und dieser stimmt mit M überein.

Gemäß der Skizze in Aufgabe 3.2 gilt für einen beliebigen Punkt P auf der Ebene:

$$|\overrightarrow{PA}| = \sqrt{|\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{MA}|^2} \quad (\text{Satz des Pythagoras})$$

$$|\overrightarrow{PB}| = \sqrt{|\overrightarrow{PM}|^2 + |\overrightarrow{MB}|^2}$$

Da $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$ gilt, folgt daraus $|\overrightarrow{PA}| = |\overrightarrow{PB}|$.

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 $D = A \cdot B \cdot C$

Format von der Matrix $A \cdot B$: $(3 \times 7) \cdot (7 \times 2) = (3 \times 2)$

Die Matrix C hat das unbekannte Format $(m \times n)$

Es gilt: $(3 \times 4) = (3 \times 2) \cdot (m \times n)$

Aus den Regeln der Matrixmultiplikation ergibt sich $m = 2$ und $n = 4$.
Die Matrix C hat das Format 2×4 .

3.2 $(R \cdot Q \cdot (4 \cdot Q) - 2 \cdot Q \cdot R \cdot Q) \cdot R$

$$= (Q^{-1} \cdot Q \cdot (4 \cdot Q) - 2 \cdot Q \cdot Q^{-1} \cdot Q) \cdot Q^{-1}$$

$$= (4 \cdot E \cdot Q - 2 \cdot E \cdot Q) \cdot Q^{-1}$$

$$= 2 \cdot E \cdot Q \cdot Q^{-1} = 2 \cdot E \quad \text{wobei } E \text{ die Einheitsmatrix ist}$$

3.3
$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ a(a-1) & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 9 + 2a(a-1) + 3c & 10 + c \end{pmatrix}$$

Bedingung:

Eintrag rechts oben: $b^2 = 4 \Rightarrow b = \pm 2$

Eintrag rechts unten: $10 + c = 11 \Rightarrow c = 1$

Eintrag links unten: $9 + 2a(a-1) + 3c = 12$

$$\Rightarrow 9 + 2a^2 - 2a + 3 = 12$$

$$\Rightarrow 2a^2 - 2a = 0$$

$$\Rightarrow 2a(a-1) = 0 \quad \text{Lösung mit Satz vom Nullprodukt}$$

$$a = 0 \text{ oder } a = 1$$

Es gibt folgende vier Lösungen:

$(0 ; 2 ; 1)$ oder $(1 ; 2 ; 1)$ oder $(0 ; -2 ; 1)$ oder $(1 ; -2 ; 1)$