

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

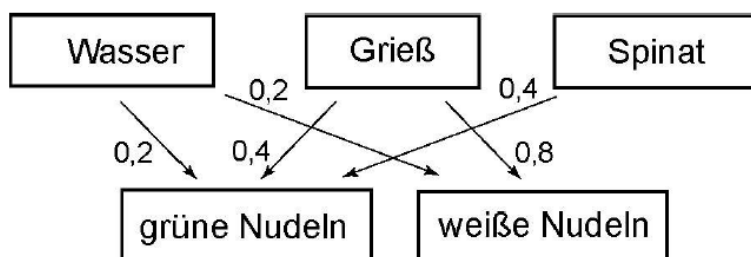
- 1 Eine Nudelmanufaktur stellt aus Wasser, Grieß und Spinat weiße und grüne Nudeln her, die in zwei verschiedenen Packungen „Pur“ und „Mix“ angeboten werden. Die folgenden Tabellen zeigen die verwendeten Mengen in Kilogramm (kg). Dabei geht man davon aus, dass 1 Liter (l) Wasser einem kg entspricht.

	grüne Nudeln	weiße Nudeln
Wasser	0,2	b
Grieß	a	0,8
Spinat	0,3	0

	„Pur“	„Mix“
grüne Nudeln	0,5	c
weiße Nudeln	0	c

	„Pur“	„Mix“
Wasser	0,1	0,1
Grieß	0,25	0,325
Spinat	0,15	0,075

- 1.1 Berechnen Sie den jeweiligen Wert für a, b und c. (3 Punkte)
- 1.2 Ein Auftrag besteht aus 2000 Packungen „Pur“ und 1000 Packungen „Mix“.
- 1.2.1 Bestimmen Sie jeweils, wie viel kg Grieß bzw. Spinat für den Auftrag benötigt werden. (2 Punkte)
- 1.2.2 Die auf den Auftrag bezogenen Fixkosten betragen 200 Euro. Die variablen Herstellkosten pro Packung „Pur“ betragen 50 Cent (ct), pro Packung „Mix“ 40 ct. Der Preis pro Packung „Pur“ soll 50% höher sein, als der Preis für „Mix“. Bestimmen Sie jeweils den Preis für eine Packung „Pur“ bzw. „Mix“, sodass der Verkaufserlös um 25% höher ist als die Gesamtkosten. (4 Punkte)
- 1.3 Durch eine neue Rezeptur verändert sich der Bedarf für die Herstellung der beiden Nudelsorten wie folgt:



Im Lager befinden sich 2000 kg Grieß, die vollständig nach der neuen Rezeptur verarbeitet werden soll. Mindestens 40% der hergestellten Nudeln sollen dabei grün sein.

Ermitteln Sie alle möglichen Wassermengen, die hierbei verbraucht werden.

(6 Punkte)

Lösungen

1.1 Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 0,2 & b \\ a & 0,8 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix}$

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 0,5 & c \\ 0 & c \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix: $C = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & 0,325 \\ 0,15 & 0,075 \end{pmatrix}$

Es gilt: $A \cdot B = C$

$$\begin{pmatrix} 0,2 & b \\ a & 0,8 \\ 0,3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & c \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,2c + bc \\ 0,5a & ac + 0,8c \\ 0,15 & 0,3c \end{pmatrix}$$

Vergleich des Ergebnisses mit Matrix C:

$$0,5a = 0,25 \Rightarrow a = 0,5$$

$$0,3c = 0,075 \Rightarrow c = 0,25$$

$$0,2c + bc = 0,1 \Rightarrow 0,2 \cdot 0,25 + 0,25b = 0,1 \Rightarrow b = 0,2$$

1.2.1 Der Produktionsvektor lautet $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix}$

Gesucht ist der Rohstoffvektor: $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & 0,325 \\ 0,15 & 0,075 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 825 \\ 375 \end{pmatrix}$

Für den Auftrag werden 825 kg Grieß und 375 kg Spinat benötigt.

1.2.2 variabler Herstellkostenvektor: $\vec{k}_V = (0,5 \quad 0,4)$

Kosten für den Auftrag: $K = \vec{k}_V \cdot \vec{p} + 200 = (0,5 \quad 0,4) \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1000 \end{pmatrix} + 200 = 1600 \text{ Euro}$

Der Verkaufserlös soll $1600 \cdot 1,25 = 2000$ Euro betragen.

Preis für Packung „Mix“ = p

Preis für Packung „Pur“ = 1,5p

Bedingung: $1000 \cdot p + 2000 \cdot 1,5p = 4000p$

$$4000p = 2000 \Rightarrow p = 0,5$$

Der Preis für eine Packung „Mix“ beträgt 0,50 €.

Der Preis für eine Packung „Pur“ beträgt 0,75 €.

1.3 Neue Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \\ 0,4 & 0 \end{pmatrix}$

Rohstoffvektor: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 2000 \\ r_3 \end{pmatrix}$

Zwischenproduktvektor: $\vec{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$

r_1 = Menge des Wassers

r_3 = Menge des Spinats

z_1 = Menge der grünen Nudeln

z_2 = Menge der weißen Nudeln

$$\begin{pmatrix} 0,2 & 0,2 \\ 0,4 & 0,8 \\ 0,4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ 2000 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$0,2z_1 + 0,2z_2 = r_1 \quad (*)$$

$$0,4z_1 + 0,8z_2 = 2000 \quad (**)$$

$$0,4z_1 = r_3$$

Aus (**) folgt: $z_2 = 2500 - 0,5z_1$ (***)

Da $z_2 \geq 0$ gelten muss folgt aus (**): $z_1 \leq 5000$

Es können maximal 5000 kg grüne Nudeln hergestellt werden.

Mindestens 40% der Nudeln sollen grün sein: $z_1 \geq 0,4(z_1 + z_2)$

$$\Rightarrow 0,6z_1 \geq 0,4z_2 \Rightarrow z_1 \geq \frac{2}{3}z_2$$

Es müssen mindestens $z_1 = \frac{2}{3}z_2$ grüne Nudeln hergestellt werden.

Eingesetzt in (**): $z_2 = 2500 - 0,5 \cdot \frac{2}{3}z_2 \Rightarrow z_2 = 1875 \text{ kg}$

Daraus folgt $z_1 = \frac{2}{3} \cdot 1875 = 1250 \text{ kg}$

Es müssen mindestens 1250 kg grüne Nudeln hergestellt werden.

Einsetzen von (***) in (*): $r_1 = 0,2z_1 + 0,2(2500 - 0,5z_1) = 500 + 0,1z_1$

Mit $z_1 = 1250$ folgt $r_1 = 625$.

Mit $z_1 = 5000$ folgt $r_1 = 1000$.

Es werden zwischen 625 Liter und 1000 Liter Wasser verbraucht.