

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Teil 4: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

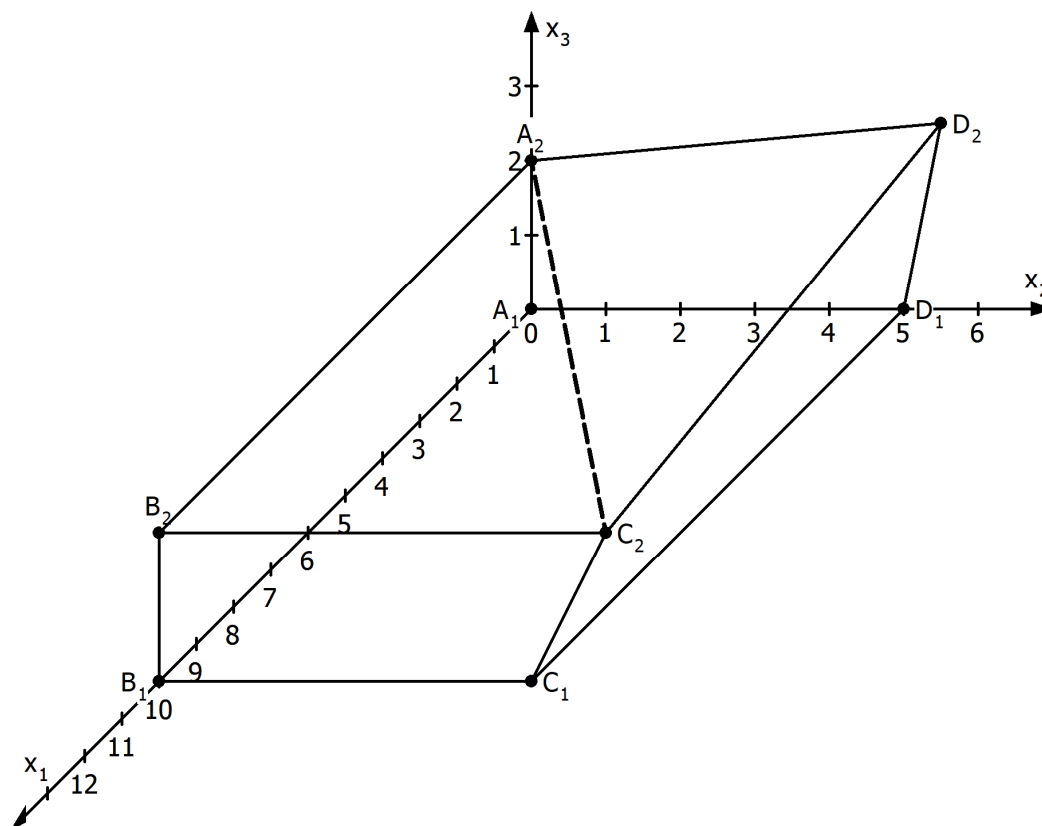
Juni 2020

Lineare Algebra: Vektorgeometrie

- 1 Ein Architekt plant ein modernes Museum.
Im Modell hat das Museum eine rechteckige Grundfläche mit den Eckpunkten $A_1(0|0|0)$, $B_1(10|0|0)$, $C_1(10|5|0)$, $D_1(0|5|0)$ und ein Dach, das aus den vier Eckpunkten $A_2(0|0|2)$, $B_2(10|0|2)$, $C_2(10|6|2)$, $D_2(0|5,5|2,5)$ gebildet wird.
Die von der Grundfläche zum Dach verlaufenden Kanten des Modells verbinden Punkte gleichen Buchstabens, z.B. ist A_1 mit A_2 verbunden.
Eine Längeneinheit im Modell entspricht 10 Meter (m).
- 1.1 Zeichnen Sie das Modell in ein geeignetes Koordinatensystem. (4 Punkte)
- 1.2 Die Vorderseite des Modells (d.h. der Schnitt mit der Ebene $x_1 = 10$) bildet ein Trapez. Diese Fläche soll zu 80% aus einem Spezialglas bestehen, das 400 Euro pro m^2 kostet.
Berechnen Sie die hierfür zu kalkulierenden Kosten. (3 Punkte)
- 1.3 Die Kante $\overline{A_2C_2}$ teilt das Dach in zwei dreieckige Flächen.
Bestimmen Sie den Winkel den diese beiden Flächen im Innern des Modells bilden. (4 Punkte)
- 1.4 Im Punkt C_2 soll ein Laser installiert werden, der den Laserstrahl in Richtung $\overline{C_1C_2}$ geradlinig in den Himmel schickt.
Entsprechend soll im Punkt D_2 ein weiterer Laser mit Laserstrahl in Richtung $\overline{D_1D_2}$ installiert werden.
- 1.4.1 Geben Sie für jeden der beiden Laserstrahlen eine Gleichung der entsprechenden Geraden an. (2 Punkte)
- 1.4.2 Bestimmen Sie die Höhe über der Grundfläche, in der diese beiden Laserstrahlen genau 212,5 m voneinander entfernt sind. (2 Punkte)

Lösungen

1.1



1.2 Das Viereck $B_1C_1C_2B_2$ ist ein Trapez.

$$\text{Flächeninhalt des Trapezes: } A = \frac{\overline{B_1C_1} + \overline{B_2C_2}}{2} \cdot h_{\text{Trapez}} = \frac{5+6}{2} \cdot 2 = 11$$

Da 1 Längeneinheit 10m entspricht, beträgt die Fläche 1100m².

Kosten: $0,8 \cdot 1100 \cdot 400 = 352000$ Euro

1.3 Hier ist der Winkel zwischen den zwei Dachflächenebenen zu bestimmen.

Ebene $A_2B_2C_2$:

Da alle drei Punkte die x_3 -Koordinate 2 haben, lautet die Ebenengleichung

$$E: x_3 = 2 \text{ mit dem Normalenvektor } \vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ebene $A_2C_2D_2$:

$$\text{Parameterform der Ebene F: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Normalenvektor von F: } \vec{n}_F = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 55 \end{pmatrix}$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_E \cdot \vec{n}_F|}{|\vec{n}_E| \cdot |\vec{n}_F|} = \frac{55}{1 \cdot \sqrt{3059}} \Rightarrow \alpha \approx 6^\circ$$

Der berechnete Winkel ist der Schnittwinkel zwischen den Ebenen.

Der Winkel im Innern des Modells beträgt $\beta = 180^\circ + 6^\circ = 186^\circ$

1.4.1 Gleichung der Gerade durch die Punkte C_1 und C_2 :

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OC_2} + r \cdot \overrightarrow{C_1C_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Gleichung der Geraden durch die Punkte D_1 und D_2 :

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OD_2} + s \cdot \overrightarrow{D_1D_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,5 \\ 2,5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0,5 \\ 2,5 \end{pmatrix}$$

1.4.2 Allgemeiner Punkt auf g: $G(10|6+r|2+2r)$
Allgemeiner Punkt auf h: $H(0|5,5+0,5s|2,5+2,5s)$

Die Punkte auf den Laserstrahlen sollen sich auf gleicher Höhe befinden.
Das heißt, die x_3 -Werte müssen übereinstimmen.

$$2 + 2r = 2,5 + 2,5s \\ \Rightarrow r = 0,25 + 1,25s \quad (*)$$

$$\text{Abstand von G und H: } |\overrightarrow{HG}| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 0,5 + r - 0,5s \\ -0,5 + 2r - 2,5s \end{pmatrix} \right|$$

Mit (*) folgt:

$$|\overrightarrow{HG}| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 0,5 + 0,25 + 1,25s - 0,5s \\ -0,5 + 2(0,25 + 1,25s) - 2,5s \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 10 \\ 0,75 + 0,75s \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{100 + (0,75 + 0,75s)^2}$$

Bedingung: $\sqrt{100 + (0,75 + 0,75s)^2} = 21,25$ (1 Längeneinheit = 10 Meter)

Quadrieren: $100 + (0,75 + 0,75s)^2 = 451,5625$

$$\Rightarrow (0,75 + 0,75s)^2 = 351,5625 \quad | \sqrt{}$$

$$\Rightarrow 0,75 + 0,75s = \pm 18,75$$

$$s_1 = 24, \quad s_2 = -26$$

Es muss $s > 0$ sein, da der Richtungsvektor von h in Richtung des Himmels zeigt.
Somit ist $s = 24$ die gesuchte Lösung.

Einsetzen von $s = 24$ in $x_3 = 2,5 + 2,5s$ ergibt $x_3 = 62,5$.

Die gesuchte Höhe beträgt 625 Meter.