

Hauptprüfung Abiturprüfung 2020

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel: WTR und Merkhilfe

Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2020

Analysis

- 1.1 Die Funktion f ist gegeben durch $f(x) = 10 \cdot x \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$. Das Schaubild von f ist K_f . Die erste Ableitung f' von f ist $f'(x) = 10 \cdot (1-x) \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ und die zweite Ableitung f'' von f ist $f''(x) = 10 \cdot (x-2) \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$.

- 1.1.1 Weisen Sie nach, dass $\left(1 \mid \frac{10}{e}\right)$ der Hochpunkt von K_f ist.

Geben Sie eine Gleichung der Asymptote von K_f an. (4 Punkte)

- 1.1.2 Zeichnen Sie K_f für $0 \leq x \leq 6$. (3 Punkte)

- 1.1.3 Zeigen Sie, dass F mit $F(x) = -10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$; $x \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist.

Bestimmen Sie den Wert von a in der Gleichung: $\int_1^2 f(x) dx = \frac{a \cdot e - 30}{e^2}$

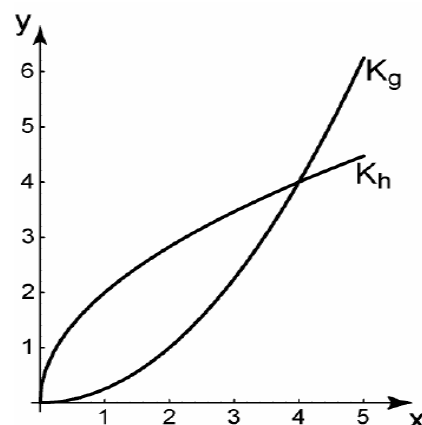
(5 Punkte)

1.2

Für $x \geq 0$ sind die Funktionen g mit $g(x) = \frac{1}{4}x^2$

und h mit $h(x) = 2\sqrt{x}$ gegeben.

Die Abbildung zeigt die Schaubilder K_g von g und K_h von h .



- 1.2.1 Prüfen Sie die folgende Aussage:

„Die Gerade durch die beiden Punkte $P(1|h(1))$ und $Q(2|g(2))$ ist sowohl die Normale von K_h in P als auch die Normale von K_g in Q .“

(4 Punkte)

- 1.2.2 Die y -Achse, K_h und die Parallele zur x -Achse mit der Gleichung $y = c$ mit $c > 0$ begrenzen eine Fläche. Durch Rotation dieser Fläche um die x -Achse entsteht ein Rotationskörper.

Bestimmen Sie den Wert von c , sodass dessen Volumen 32π beträgt.

(4 Punkte)

Lösungen**1.1.1** Hinreichende Bedingung für Hochpunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) < 0$

Kontrolle, ob die Bedingungen für $x = 1$ erfüllt sind:

$$f'(1) = 10 \cdot (1-1) \cdot e^{-1} = 0$$

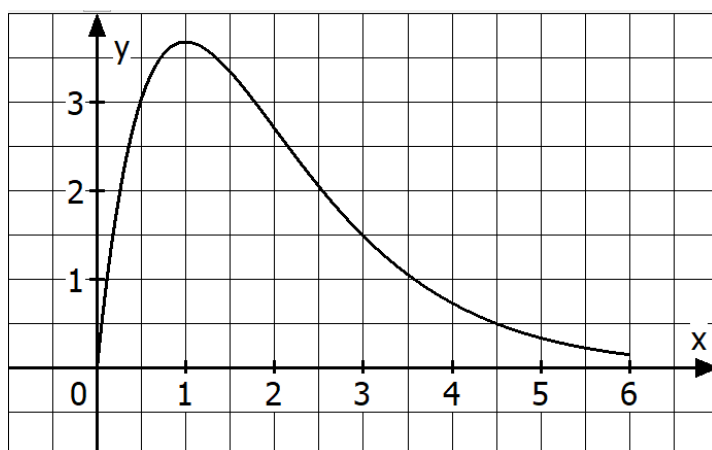
$$f''(1) = 10 \cdot (1-2) \cdot e^{-1} = -10e^{-1} < 0$$

Damit liegt bei $x = 1$ ein Hochpunkt vor.

Wegen $f(1) = 10e^{-1} = \frac{10}{e}$ lautet der Hochpunkt $H(1 | \frac{10}{e})$

Gleichung der Asymptote:

Für $x \rightarrow +\infty$ lautet die waagrechte Asymptote $y = 0$ (wegen $e^{-x} \rightarrow 0$).

1.1.2 Zeichnung von K_f für $0 \leq x \leq 6$ mit Hilfe des Hochpunktes, der Asymptote und der Wertetabelle des WTR:**1.1.3** F ist eine Stammfunktion von f , wenn $F'(x) = f(x)$ ist.

Ableitung von F mit der Produkt- und Kettenregel:

$$F(x) = -10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x}$$

$$F'(x) = -10 \cdot e^{-x} - 10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) = 10e^{-x} \cdot (-1 + x + 1) = 10x \cdot e^{-x} = f(x)$$

Damit ist gezeigt, dass F eine Stammfunktion von f ist.

$$\int_1^2 f(x) dx = \left[-10 \cdot (x+1) \cdot e^{-x} \right]_1^2 = -10 \cdot 3 \cdot e^{-2} + 10 \cdot 2 \cdot e^{-1} = -\frac{30}{e^2} + \frac{20}{e} = \frac{-30 + 20e}{e^2}$$

Bedingung: $\frac{-30 + 20e}{e^2} = \frac{a \cdot e - 30}{e^2}$

Daraus folgt $a = 20$.

1.2.1 Berechnung der Punktkoordinaten:

$$h(1) = 2, \text{ also } P(1|2)$$

$$g(2) = 1, \text{ also } Q(2|1)$$

$$\text{Steigung der Geraden durch P und Q: } m_{PQ} = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{2-1}{1-2} = -1$$

Ableitungen der Funktionen:

$$h(x) = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow h'(x) = x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{2}x$$

Steigung der Tangente in P an das Schaubild von h: $h'(1) = 1$

Wegen $m_{PQ} \cdot h'(1) = -1 \cdot 1 = -1$ ist die Gerade durch P und Q senkrecht zur Tangente.

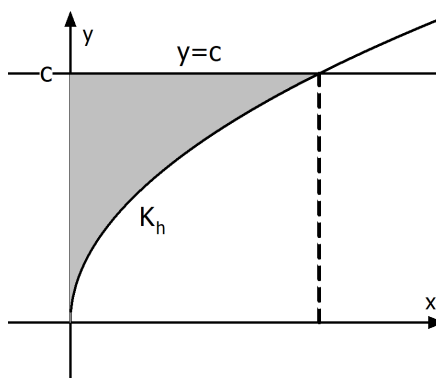
Aussage ist für Punkt P richtig.

Steigung der Tangente in Q an das Schaubild von g: $g'(2) = 1$

Wegen $m_{PQ} \cdot g'(2) = -1 \cdot 1 = -1$ ist die Gerade durch P und Q senkrecht zur Tangente.

Aussage ist für Punkt Q richtig.

1.2.2 Skizze:



Rechte Grenze des Integrals:

Schnittstelle des Schaubildes von h und der Gerade $y = c$: $h(x) = c$

$$2 \cdot \sqrt{x} = c \Rightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}c \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{4}c^2$$

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{4}c^2} \left(c^2 - (2\sqrt{x})^2 \right) dx = \pi \cdot \int_0^{\frac{1}{4}c^2} (c^2 - 4x) dx = \pi \cdot \left[c^2x - 2x^2 \right]_0^{\frac{1}{4}c^2} \\ &= \pi \cdot \left(\frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{8}c^4 \right) = \frac{1}{8} \pi \cdot c^4 \end{aligned}$$

$$\text{Bedingung: } \frac{1}{8} \pi \cdot c^4 = 32\pi \quad \Leftrightarrow c^4 = 256 \quad \Leftrightarrow c = \pm \sqrt[4]{256} = \pm 4$$

Wegen $c > 0$ ist $c = 4$ der gesuchte Wert.