

Hauptprüfung Abiturprüfung 2018

Baden-Württemberg

Teil 2: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

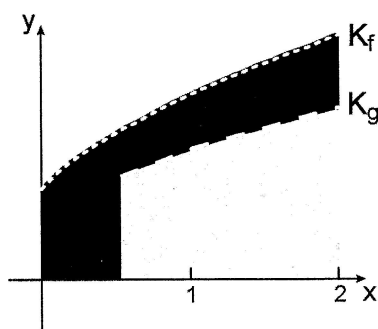
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Anwendungsorientierte Analysis

- 3 Für eine Gartenschau sollen verschiedene Pflanzenkübel mit einer Höhe von jeweils 2 Meter aus Kunststoff gegossen werden. Die Abbildung unten zeigt beispielhaft den halben Querschnitt eines um 90° gekippten Pflanzenkübels mit seinem Pflanzeinsatz. Der Kübel wird durch Rotation der schwarzen Fläche um die x-Achse beschrieben. Die Mantelfläche des Kübels wird hierbei mit Hilfe des Schaubilds K_f der Funktion f erzeugt (in der Abbildung gepunktet). Analog wird die Mantelfläche des Pflanzeinsatzes mit Hilfe des Schaubilds K_g der Funktion g erzeugt (in der Abbildung gestrichelt). Alle Angaben sind in Meter (m).



- 3.1 Zur Modellierung eines bestimmten Pflanzenkübels werden die Funktionen f und g mit $f(x) = \sqrt{x+1}$; $0 \leq x \leq 2$ und $g(x) = \sqrt{0,5x+0,5}$; $0,5 \leq x \leq 2$ verwendet. Dieser Pflanzenkübel wird aus Kunststoff der Dichte 0,9 Tonnen pro Kubikmeter gefertigt. Berechnen Sie die Masse dieses Pflanzkübels in Tonnen.

(5 Punkte)

- 3.2 Für einen anderen Pflanzenkübel wird die Funktion f mit $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$; $0 \leq x \leq 2$ verwendet. Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass in einer Höhe von 2m der Radius des Pflanzenkübels 1,5m ist und der kleinste Radius in einer Höhe von 1m vorliegt.

(5 Punkte)

Lösungen**3.1 Berechnen Sie die Masse dieses Pflanzkübels in Tonnen.**

Berechnung des äußeren Volumens:

$$V_{\text{außen}} = \pi \cdot \int_0^2 \sqrt{x+1}^2 dx = \pi \cdot \int_0^2 (x+1) dx = \pi \cdot \left[0,5x^2 + x \right]_0^2 = \pi \cdot (2 + 2 - 0) = 4\pi$$

Berechnung des inneren Volumens:

$$V_{\text{innen}} = \pi \cdot \int_{0,5}^2 \sqrt{0,5x + 0,5}^2 dx = \pi \cdot \int_{0,5}^2 (0,5x + 0,5) dx = \pi \cdot \left[0,25x^2 + 0,5x \right]_{0,5}^2$$

$$= \pi \cdot \left(1 + 1 - \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \right) \right) = \frac{27}{16} \pi$$

Das Volumen des Pflanzenkübels beträgt $V = 4\pi - \frac{27}{16}\pi = \frac{37}{16}\pi = 7,265 \text{ m}^3$

Dadurch ergibt sich eine Masse von $m = 0,9 \frac{\text{t}}{\text{m}^3} \cdot 7,265 \text{ m}^3 = 6,54 \text{ t}$

Der Kübel wiegt ca. 6,5 Tonnen.**3.2 Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, sodass in einer Höhe von 2m der Radius des Pflanzenkübels 1,5m ist und der kleinste Radius in einer Höhe von 1m vorliegt.**

Funktionsansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + 1$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

Es soll gelten:

$$f(2) = 1,5 : 8a + 4b + 1 = 1,5 \Rightarrow 8a + 4b = 0,5 \quad (*)$$

$$f'(1) = 0 : 3a + 2b = 0 \quad (**)$$

Aus (**) folgt $b = -1,5a$

Einsetzen in (*) ergibt: $8a + 4 \cdot (-1,5a) = 0,5 \Rightarrow 2a = 0,5 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$

Daraus folgt $b = -1,5 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{3}{8}$

Die gesuchte Funktion könnte lauten: $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{3}{8}x^2 + 1$ mit $0 \leq x \leq 2$

Da wir in den Bedingungen jedoch nur die notwendige Bedingung für ein lokales Minimum genutzt haben, muss noch geprüft werden, ob an dieser Stelle tatsächlich ein Tiefpunkt existiert und dieser Tiefpunkt das absolute Minimum des Schaubildes darstellt.

Es gilt $f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x$ und $f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}$

Da $f'(1) = 0$ ist und $f''(1) = \frac{3}{4} > 0$ ist, existiert bei $x = 1$ ein lokales Minimum mit

$$f(1) = \frac{1}{4} - \frac{3}{8} + 1 = \frac{7}{8}.$$

Nun muss noch geprüft werden, ob bei $x = 1$ ein absolutes Minimum vorliegt. Hierzu müssen die Randwerte der Funktion f überprüft werden.

$$\text{Randwert } x = 0: f(0) = 1 > \frac{7}{8}$$

$$\text{Randwert } x = 2: f(2) = \frac{3}{2} > \frac{7}{8}$$

Somit existiert bei $x = 1$ ein absolutes Minimum.

Somit erfüllen die berechneten Werte a und b die Bedingungen.