

Hauptprüfung Abiturprüfung 2018

Baden-Württemberg

Teil 3: Hilfsmittel WTR und Merkhilfe

Stochastik

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

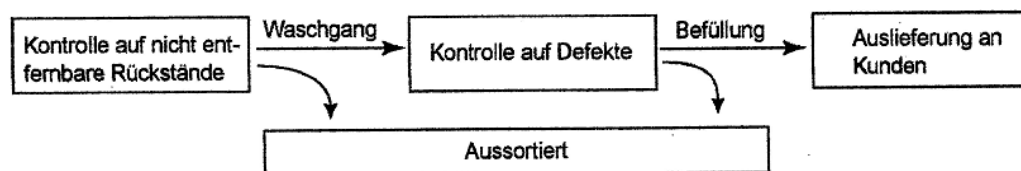
Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2018

Stochastik

- 2 Der Mineralwasserproduzent „Sauberwasser“ muss zurückgegebene PET-Pfandflaschen von einer erneuten Befüllung auf nicht entfernbare Rückstände sowie auf Defekte (wie Risse) untersuchen und gegebenenfalls direkt nach der jeweiligen Kontrolle aussortieren. Der Prozessablauf, den jede einzelne Flasche durchläuft, ist im Folgenden dargestellt:

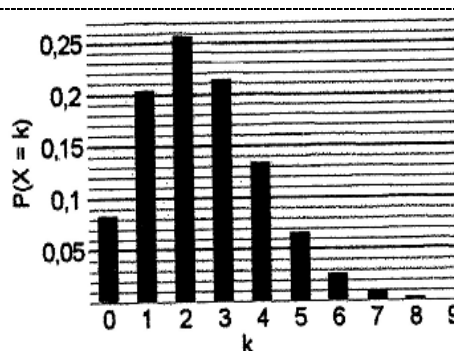


- 2.1 Beim Produzenten Sauberwasser weiß man:
- 99% aller Flaschen durchlaufen den Waschgang
 - 96% aller Flaschen werden befüllt, haben also weder nicht entfernbare Rückstände noch einen Defekt
- 2.1.1 Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:
- E1: Von 5 Flaschen werden 5 befüllt.
 E2: Von 15 Flaschen wird genau eine Flasche nicht befüllt.
 E3: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.
 E4: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen.
- (7 Punkte)
- 2.1.2 Bestimmen Sie, wie viele Flaschen mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens eine Flasche vorzufinden, die nicht befüllt wird.
- (3 Punkte)
- 2.2 Trotz aller Qualitätskontrollen können nicht alle fehlerhaften Flaschen erkannt werden. Erfahrungsgemäß sind 0,5% aller ausgelieferten Flaschen fehlerhaft. Der Produzent Sauberwasser kontrolliert vor der Auslieferung an die Kunden bei einer Stichprobe 500 Flaschen auf Fehler. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl X der fehlerhaften Flaschen dieser Stichprobe.

Im Diagramm ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X dargestellt.

Bestimmen Sie damit näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Flaschen im σ -Intervall des Erwartungswerts liegt.

Nennen Sie einen Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel.



(5 Punkte)

Lösungen

2.1.1 *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für folgende Ereignisse:*

E1: Von 5 Flaschen werden 5 befüllt.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der befüllten Flaschen an.
 X ist binomialverteilt mit $n = 5$ und $p = 0,96$.

$$P(E1) = P(X = 5) \approx 0,815 \quad (\text{WTR})$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,815 bzw. 81,5%.

E2: Von 15 Flaschen wird genau eine Flasche nicht befüllt.

Die Zufallsvariable X gibt die Anzahl der befüllten Flaschen an.
 X ist binomialverteilt mit $n = 15$ und $p = 0,96$.

$$P(E2) = P(X = 14) \approx 0,339 \quad (\text{WTR})$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,339 bzw. 33,9%.

E3: Eine Flasche, die gewaschen wurde, wird auch befüllt.

$$P(E3) = P_{\text{gew}}(\text{bef}) = \frac{P(\text{gew} \cap \text{bef})}{P(\text{gew})} = \frac{P(\text{bef})}{P(\text{gew})} = \frac{0,96}{0,99} \approx 0,970$$

Hinweis: Da alle Flaschen, die befüllt sind auch gewaschen wurden, gilt
 $P(\text{gew} \cap \text{bef}) = P(\text{bef})$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,97 bzw. 97%.

E4: Eine Flasche, die nicht befüllt wird, wurde nicht gewaschen.

$$P(E4) = P_{\text{bef}}(\overline{\text{gew}}) = \frac{P(\overline{\text{gew}} \cap \overline{\text{bef}})}{P(\overline{\text{bef}})} = \frac{P(\overline{\text{gew}})}{P(\overline{\text{bef}})} = \frac{0,01}{0,04} = 0,25$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,25 bzw. 25%.

2.1.2 *Bestimmen Sie, wie viele Flaschen mindestens kontrolliert werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens eine Flasche vorzufinden, die nicht befüllt wird.*

$$P(\text{mindestens eine von } n \text{ Flaschen wird nicht befüllt}) > 0,9$$

$$1 - P(\text{alle } n \text{ Flaschen werden befüllt}) > 0,9$$

$$1 - 0,96^n > 0,9$$

$$\Rightarrow -0,96^n > -0,1 \quad | \cdot (-1)$$

$$\Rightarrow 0,96^n < 0,1 \quad | \ln$$

$$\Rightarrow \ln(0,96^n) < \ln(0,1)$$

$$\Rightarrow n \cdot \ln(0,96) < \ln(0,1) \quad | : \ln(0,96)$$

$$\Rightarrow n > \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,96)} \approx 56,4$$

Es müssen mindestens 57 Flaschen kontrolliert werden.

- 2.2 *Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung für die Anzahl X der fehlerhaften Flaschen dieser Stichprobe.*

X ist binomialverteilt mit $n = 500$ und $p = 0,005$.

$$E(X) = n \cdot p = 500 \cdot 0,005 = 2,5$$

$$\sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)} = \sqrt{500 \cdot 0,005 \cdot 0,995} \approx 1,577$$

Der Erwartungswert beträgt 2,5 und die Standardabweichung 1,577.

Bestimmen Sie damit näherungsweise die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der fehlerhaften Flaschen im σ -Intervall des Erwartungswerts liegt.

$$\sigma\text{-Intervall: } [E(X) - \sigma; E(X) + \sigma] \rightarrow [2,5 - 1,577; 2,5 + 1,577] \rightarrow [0,923; 4,08]$$

Wahrscheinlichkeit, dass X im σ -Intervall liegt mit WTR:

$$P(0,923 \leq X \leq 4,08) = P(1 \leq X \leq 4) = P(X \leq 4) - P(X \leq 0) = 0,8917 - 0,0816 = 0,8101$$

Wahrscheinlichkeit, dass X im σ -Intervall liegt mit Diagramm:

$$P(0,923 \leq X \leq 4,08) = P(1 \leq X \leq 4) = P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4)$$

$$\approx 0,2 + 0,26 + 0,21 + 0,13 = 0,8$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 80%.

Nennen Sie einen Grund für die Abweichung von der Wahrscheinlichkeit aus der entsprechenden Sigma-Regel.

Die Sigma-Regel liefert für $P(1 \leq X \leq 4)$ einen Wert von ca. 68% und damit ein sehr ungenaues Ergebnis für die tatsächliche Wahrscheinlichkeit.

Ein Grund für diese Ungenauigkeit ist, dass die Bedingung $\sigma > 3$ hier nicht erfüllt ist.