

Hauptprüfung Abiturprüfung 2017

Baden-Württemberg

Teil 4 (mit Hilfsmittel)

Vektorgeometrie

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2017

1 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

1.1 Gegeben ist die Ebene E: $2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3 = 12$.

1.1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt von E mit der x_3 -Achse.

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene F an, die parallel zu E aber nicht identisch mit E ist.

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene G an, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat.

(4 Punkte)

1.1.2 Bestimmen Sie a und b, sodass die Ebene E in Normalenform als

$$E: \left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = 0$$

geschrieben werden kann.

(2 Punkte)

1.1.3 Prüfen Sie, ob der Punkt P(1/0/1) zur Ebene E den Abstand $d = \sqrt{13}$ hat.

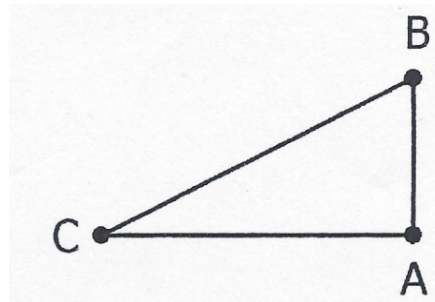
(3 Punkte)

1.2 Gegeben sind die Punkte A(0/0/2) und B(0/0/4).
Ein weiterer Punkt C erfüllt folgende Bedingungen:

(1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$

(2) $\frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = 6$

Skizze:



1.2.1 Interpretieren Sie die Bedingungen (1) und (2) geometrisch.

(2 Punkte)

1.2.2 Bei Rotation der Fläche um die Achse AB entsteht ein Rotationskörper.
Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Ein möglicher Punkt C hat die Koordinaten $(c/c/2)$ mit $c > 0$.
Bestimmen Sie den Wert von c.

(4 Punkte)

Lösungen

1.1.1 Berechnen Sie den Schnittpunkt von E mit der x_3 -Achse.

Setze $x_3 = 0$

Schnittpunkt mit der x_3 -Achse: $S_{x_3}(0/0/x_3)$

Setze $x_1 = x_2 = 0$ in E ein: $-3x_3 = 12 \Rightarrow x_3 = -4$

Schnittpunkt mit der x_3 -Achse: $S_{x_3}(0/0/-4)$

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene F an, die parallel zu E aber nicht identisch mit E ist.

Der Normalenvektor von F kann von E übernommen werden. F enthält einen beliebigen Punkt, der nicht auf E liegt.

Die Ebene F besitzt denselben Normalenvektor wie E , also $\vec{n}_F = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Der Punkt $A(0|0|1)$ liegt nicht auf E .

Ansatz für die Koordinatengleichung von F : $2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3 = d$

Einsetzen von A liefert $d = -3$.

Mögliche Koordinatengleichung von F : $2 \cdot x_1 - 3 \cdot x_3 = -3$

Geben Sie eine Koordinatenform einer Ebene G an, die nur eine Gerade mit E gemeinsam hat.

Die Ebenen E und F dürfen nicht parallel sein.

Wenn die Ebene G nur eine Gerade mit E gemeinsam hat, muss G einen Normalenvektor besitzen, der kein vielfacher Normalenvektor von E ist.

Mögliche Lösung: G : $x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$

(es gibt aber unendlich viele weitere Möglichkeiten)

1.1.2 Bestimmen Sie a und b .

Normalenvektor in der Normalenform mit ein Vielfaches vom Normalenvektor in der Koordinatengleichung sein. Der Punkt $P(0|0|a)$ muss auf E liegen.

Normalenvektor in der Normalenform: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$.

Bedingung: $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ b \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

Es gilt $k = 3$ und damit $b = -9$.

Außerdem muss der Punkt $P(0|0|a)$ auf der Ebene E liegen.

Da gemäß Aufgabe 1.1.1 der Punkt $S_{x_3}(0|0|-4)$ auf E liegt, muss $a = -4$ sein.

Es ist $b = -9$ und $a = -4$.

1.1.3 Prüfen Sie, ob der Punkt $P(1/0/1)$ zur Ebene E den Abstand $d = \sqrt{13}$ hat.

Berechne den Abstand von P zu E mit der HNF.

HNF von E : $\frac{2x_1 - 3x_3 - 12}{\sqrt{4 + 0 + 9}} = 0$

Einsetzen von $P(1/0/1)$ in die HNF: $d(P,E) = \left| \frac{2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 - 12}{\sqrt{13}} \right| = \frac{13}{\sqrt{13}} = \sqrt{13}$

Der Punkt P hat zur Ebene E den Abstand $\sqrt{13}$.

1.2.1 Interpretieren Sie die Bedingungen (1) und (2) geometrisch.

Bedingung (1) betrifft die Orthogonalität der Vektoren.
Bedingung (2) betrifft die Fläche des Dreiecks ABC .

Bedingung (1): Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ sind orthogonal zueinander.
Das Dreieck ABC besitzt bei A einen rechten Winkel.

Bedingung (2): **Der Flächeninhalt des Dreiecks ABC beträgt 6 FE.**

1.2.2 Bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Der Rotationskörper ist ein Kegel.
 Untersuche, welche Strecke der Radius und die Höhe des Kegels darstellt.
 Für die Berechnung des Radius muss die Bedingung (2) genutzt werden.

Der Rotationskörper ist ein Kegel mit dem Radius $r = |\overline{AC}|$ und der Höhe $h = |\overline{AB}|$

Volumenformel des Kegels: $V = \frac{1}{3} \pi \cdot r^2 \cdot h = \frac{1}{3} \pi \cdot |\overline{AC}|^2 \cdot |\overline{AB}|$

Es gilt $|\overline{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0+0+4} = 2$

Um die Länge des Vektors $\overline{AC}$ zu erhalten, benötigt man die gegebene Fläche des Dreiecks.

$$A_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot |\overline{AB}| = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot |\overline{AC}| \cdot 2 = 6 \Rightarrow |\overline{AC}| = 6 \text{ LE}$$

Also gilt $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 6^2 \cdot 2 = 24\pi \approx 75,4$

Der Kegel hat ein Volumen von 75,4 Volumeneinheiten.

Bestimmen Sie den Wert von c.

Bestimme den Wert von c so, dass die Bedingungen (1) und (2) erfüllt sind.

Der Punkt C muss die Bedingung (1) erfüllen: $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

Daraus folgt, dass der Punkt C immer die Bedingung (1) erfüllt, egal welcher Wert von c gewählt wird.

Der Punkt C muss die Bedingung erfüllen, dass $|\overline{AC}| = 6$ ist:

$$|\overline{AC}| = \left| \begin{pmatrix} c \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{c^2 + c^2 + 0} = \sqrt{2c^2}$$

Bedingung: $\sqrt{2c^2} = 6 \Rightarrow 2c^2 = 36 \Rightarrow c^2 = 18 \Rightarrow c = \pm\sqrt{18}$

Da $c > 0$ sein soll, muss $c = \sqrt{18}$ sein.