

Hauptprüfung Abiturprüfung 2017

Baden-Württemberg

Teil 3 (mit Hilfsmittel)

Stochastik

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2017

1 Stochastik

Beim Strafstoß („Elfmeter“) gibt es drei mögliche Ergebnisse:

- (1) Der Schütze erzielt ein Tor.
- (2) Der Torhüter wehrt den Ball ab.
- (3) Der Schütze trifft die Torbegrenzung oder verfehlt das Tor.

Der Fußballer Tom erzielt beim Strafstoß mit einer Wahrscheinlichkeit von 80% ein Tor.

- 1.1 Tom schießt vier Strafstöße. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:

A: Er erzielt vier Tore.

B: Er erzielt mindestens drei Tore.

C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

(5 Punkte)

- 1.2 Ein Freund bietet Tom folgendes Spiel an:

„Wenn du ein Tor erzielst, zahle ich dir einen Euro, sollte der Torhüter den Ball abwehren, zahlst du mir zwei Euro. Ansonsten musst du mir 10 Euro geben.“

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.

(5 Punkte)

- 1.3 In einer Fußballliga wird bei 87% aller Strafstöße ein Tor erzielt.
10% der Strafstöße werden vom Torhüter abgewehrt.

- 1.3.1 Bei einem Strafstoß wird kein Tor erzielt.

Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter den Ball abgewehrt hat.

(2 Punkte)

- 1.3.2 In einer Saison wurden 70 Strafstöße gegeben.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 68 Tore erzielt werden.

(3 Punkte)

Lösungen

1.1 *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die folgenden Ereignisse:*

A: Er erzielt vier Tore.

B: Er erzielt mindestens drei Tore.

C: Er erzielt genau drei Tore in Folge.

Die Ereignisse A und B können mit einem Baumdiagramm oder mit einer binomialverteilten Zufallsvariable gelöst werden.
Die Wahrscheinlichkeit von C kann nicht über eine Binomialverteilung berechnet werden, da vorgegeben ist, in welcher Reihenfolge die Tore geschossen werden sollen.

Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der geschossenen Tore.
X ist binomialverteilt mit $n = 4$ und $p = 0,8$.

$$P(A) = P(X = 4) = 0,4096 \quad (\text{WTR})$$

Die Wahrscheinlichkeit für A beträgt ca. 41%.

$$P(B) = P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 0,8192 \quad (\text{WTR})$$

Die Wahrscheinlichkeit für B beträgt ca. 82%.

$$\begin{aligned} P(C) &= P(\text{genau drei Tore in Folge}) = \\ &= P(TTT\bar{T}) + P(\bar{T}TTT) = 0,8^3 \cdot 0,2 + 0,2 \cdot 0,8^3 = 0,2048 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit für C beträgt ca. 20%.

1.2 *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, wenn man davon ausgeht, dass auf lange Sicht keiner der beiden einen Gewinn macht, das Spiel also fair ist.*

Definiere eine Zufallsvariable Y, die den Gewinn von Tom beschreibt.
Es muss gelten: $E(Y) = 0$.

Die Zufallsvariable Y beschreibe den Gewinn von Tom.

Y kann folgende Werte annehmen:

$Y = 1$ €: Tom erzielt ein Tor

$Y = -2$ €: Torhüter wehrt den Ball ab

$Y = -10$ €: ansonsten (Tom trifft Torbegrenzung oder verfehlt das Tor)

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt sei p.

$$P(Y=1) = 0,8$$

$$P(Y = -2) = p$$

$$P(Y = -10) = 1 - 0,8 - p = 0,2 - p$$

Da das Spiel fair sein soll, muss gelten: $E(Y) = 0$

$$E(Y) = 1 \cdot 0,8 - 2 \cdot p - 10 \cdot (0,2 - p) = 0,8 - 2p - 2 + 10p = -1,2 + 8p$$

$$-1,2 + 8p = 0 \Rightarrow p = 0,15$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der der Torhüter den Ball abwehrt, beträgt 15%.

1.3.1 *Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Torhüter den Ball abgewehrt hat.*

Es handelt sich um eine bedingte Wahrscheinlichkeit, da bekannt ist, dass bei einem Strafstoß kein Tor erzielt wurde.

$$\begin{aligned} P_{\text{kein Tor}}(\text{Torhüter wehrt Ball ab}) &= \frac{P(\text{kein Tor} \cap \text{Torhüter wehrt Ball ab})}{P(\text{kein Tor})} \\ &= \frac{0,10}{0,13} \approx 0,7692 \end{aligned}$$

Bei etwa 77% der Strafstöße, bei denen kein Tor erzielt wurde, hat der Torhüter den Ball abgewehrt.

1.3.2 *Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass davon mindestens 68 Tore erzielt werden.*

Führe eine binomialverteilte Zufallsvariable ein mit $n = 70$ und $p = 0,87$.

Die Zufallsvariable Z beschreibe die Anzahl der erzielten Tore.
 Z ist binomialverteilt mit $n = 70$ und $p = 0,87$.

$$P(Z \geq 68) = 1 - P(Z \leq 67) \approx 0,0038$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt ca. 0,38%.