

Hauptprüfung Abiturprüfung 2017

Baden-Württemberg

Teil 2 (mit Hilfsmittel)

Anwendungsorientierte Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2017

4 Anwendungsorientierte Analysis

In Schulversuchen wird die Lösung eines chemischen Stoffes mit Salzsäure versetzt. Dadurch zerfällt der Stoff und dessen Konzentration c sinkt im Laufe der Zeit t .

v ist die momentane Änderungsrate der Konzentration c .

Im Folgenden sind c in Mol pro Liter $\left(\frac{\text{mol}}{\text{l}}\right)$ und die Zeit t in Sekunden (s) angegeben.

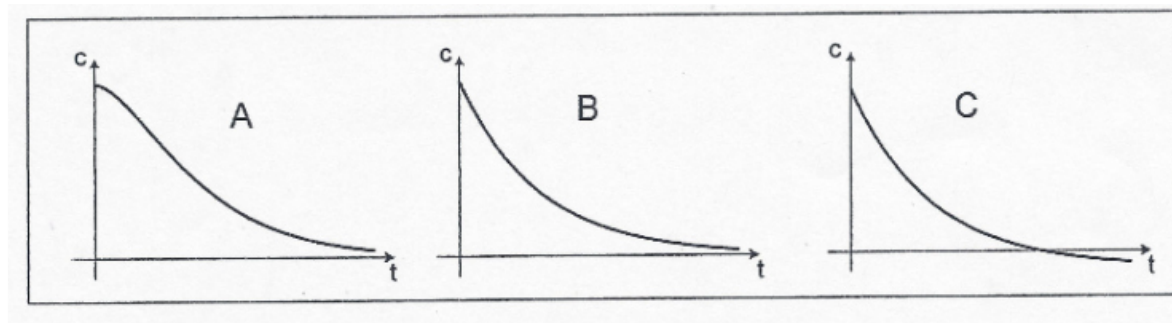
- 4.1 In einem ersten Versuch wird die Konzentration c in Abhängigkeit von t modelliert durch: $c(t) = 0,05 \cdot e^{-0,017t}$, $t \geq 0$.

- 4.1.1 Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch 10% der Anfangskonzentration vorhanden sind.

Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.

In welcher Einheit wird v gemessen? (4 Punkte)

- 4.1.2 Eine der unten stehenden drei Abbildungen zeigt das Schaubild der Funktion c . Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen. (2 Punkte)



- 4.2 Unter anderen Bedingungen berechnet sich die momentane Änderungsrate v zum Zeitpunkt t durch $v(t) = -0,007 \cdot e^{-0,07t}$, $t \geq 0$

Die Anfangskonzentration des Stoffes ist dann $0,125 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$.

Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.

(4 Punkte)

Lösungen

- 4.1.1 *Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem nur noch 10% der Anfangskonzentration vorhanden sind.*

Berechne $c(0)$ und berechne t , wenn nur noch 10% von $c(0)$ vorhanden sind.

Die Anfangskonzentration beträgt $c(0) = 0,05 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$

10% der Anfangskonzentration beträgt $0,05 \cdot 0,1 = 0,005 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$.

$$c(t) = 0,005 \Rightarrow 0,005 = 0,5 \cdot e^{-0,017t} \Rightarrow e^{-0,017t} = 0,1 \Rightarrow t = \frac{\ln(0,1)}{-0,017} = 135,4 \text{ s}$$

Nach ca. 135 Sekunden sind nur noch 10% der Anfangskonzentration vorhanden.

*Geben Sie den Wert von v drei Minuten nach Versuchsbeginn an.
In welcher Einheit wird v gemessen?*

$v(t)$ ist die erste Ableitungsfunktion von $c(t)$.

Es gilt $v(t) = c'(t) = 0,05 \cdot e^{-0,017t} \cdot (-0,017)$

Momentane Änderungsrate nach 3 Minuten (180 Sekunden):

$$v(180) = 0,05 \cdot e^{-0,017 \cdot 180} \cdot (-0,017) \approx -3,985 \cdot 10^{-5}$$

Die momentane Änderungsrate beträgt ca. $-4 \cdot 10^{-5}$

Die Einheit von v ist $\frac{\text{mol}}{\text{l} \cdot \text{s}}$

- 4.1.2 Entscheiden Sie welche. Erläutern Sie, warum die beiden anderen Schaubilder nicht in Frage kommen.

Bei der Funktion $c(t)$ handelt es sich um einen exponentiellen Zerfall.
Beurteile, welches der Schaubilder diesen Zerfall beschreiben.

Das Schaubild der Funktion c entspricht dem Schaubild B.

Schaubild C ist es nicht:

Mögliche Begründungen:

- 1.) Das Schaubild von $c(t)$ keine Nullstelle besitzt.
- 2.) Das Schaubild von $c(t)$ kann nicht negativ werden.

Schaubild A ist es nicht:

Mögliche Begründungen:

- 1.) Das Schaubild von $c(t)$ besitzt auf der y-Achse keinen Punkt mit waagrechter Tangente.
- 2.) Das Schaubild von $c(t)$ besitzt keinen Wendepunkt.

4.2 *Bestimmen Sie, wie viel Prozent der Anfangskonzentration langfristig übrig bleibt.*

Berechne die Stammfunktion $c^*(t)$ von $v(t)$ mit Hilfe der gegebenen Anfangskonzentration und bestimme das Verhalten von $c^*(t)$ für $t \rightarrow +\infty$

Es gilt $v(t) = -0,007 \cdot e^{-0,07t}$.

Die Konzentrationsfunktion $c^*(t)$ ist die Stammfunktion von $v(t)$ mit $c^*(0) = 0,125$.

$$c^*(t) = -0,007 \cdot e^{-0,07t} \cdot \frac{1}{-0,07} + C = 0,1 \cdot e^{-0,07t} + C$$

Mit $c^*(0) = 0,125$ folgt $c^*(0) = 0,1 \cdot e^0 + C = 0,125 \Rightarrow C = 0,025$

Die Funktionsgleichung lautet $c^*(t) = 0,1 \cdot e^{-0,07t} + 0,025$.

Für $t \rightarrow +\infty$ strebt $c^*(t) \rightarrow 0,025$.

Von der Anfangskonzentration von $0,125 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ bleiben langfristig $0,025 \frac{\text{mol}}{\text{l}}$ übrig.

Dies entspricht einem prozentualen Anteil von $\frac{0,025}{0,125} = 0,2 = 20\%$