

Hauptprüfung Abiturprüfung 2017

Baden-Württemberg

Teil 2 (mit Hilfsmittel)

Analysis

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2017

1 Analysis

- 1.1 Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 0,5x^4 + x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.
Das Schaubild von f ist K .

- 1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte und Wendepunkte.
Zeichnen Sie K . (8 Punkte)

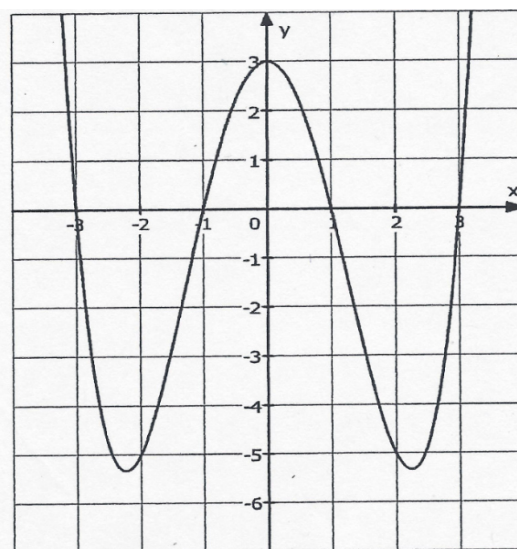
- 1.1.2 Das Schaubild K , die Tangente von K an der Stelle $x = -1$ und die y -Achse schließen im zweiten Quadranten eine Fläche ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (5 Punkte)

- 1.1.3 Für einen positiven Wert von m hat das Schaubild der Funktion g mit
 $g(x) = 0,5 \cdot x^4 + x^3 + x^2 + m \cdot x + 2$, $x \in \mathbb{R}$

genau einen gemeinsamen Punkt mit K .

Bestimmen Sie diesen Wert von m . (3 Punkte)

- 1.2 C ist das Schaubild einer Funktion h .
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion h' .



Entscheiden Sie, ob folgende Aussagen für den abgebildeten Bereich wahr oder falsch sind. Begründen Sie.

(1) Das Schaubild C hat den Tiefpunkt $T(1/h(1))$.

(2) Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

(4 Punkte)

Lösungen**1.1.1 Untersuchen Sie K auf Extrempunkte.**

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

Berechnung der Ableitungsfunktionen von $f(x) = 0,5x^4 + x^3 + 1$

$$f'(x) = 2x^3 + 3x^2$$

$$f''(x) = 6x^2 + 6x$$

$$f'''(x) = 12x + 6$$

Extrempunkte von $f(x)$:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$2x^3 + 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 \cdot (2x + 3) = 0 \quad \text{Anwendung des Satzes vom Nullprodukt:}$$

$$\text{Gleichung I): } x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } 2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1,5$$

Hinreichende Bedingung:

Prüfung für $x = 0$:

$f''(0) = 0$: Mit Hilfe der 2. Ableitung kann man keine Aussage treffen, ob bei $x = 0$ ein Extrempunkt vorliegt.

Kontrolle mit Vorzeichenwechsel von $f'(x)$:

$$f'(-1) = -2 + 3 = 1 > 0$$

$$f'(1) = 5 > 0$$

Da kein Vorzeichenwechsel existiert, befindet sich an der Stelle $x = 0$ ein Sattelpunkt (und kein Extrempunkt)

Prüfung für $x = -1,5$:

$$f''(-1,5) = 6 \cdot (-1,5)^2 + 6 \cdot (-1,5) = 4,5 > 0, \text{ also relatives Minimum (Tiefpunkt)}$$

$$f(-1,5) = \frac{5}{32}, \text{ also Tiefpunkt } T(-1,5 \mid \frac{5}{32})$$

Die Funktion besitzt nur einen Tiefpunkt $T(-1,5 \mid \frac{5}{32})$

Untersuchen Sie K auf Wendepunkte.

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

Notwendige und hinreichende Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$6x^2 + 6x = 0 \Rightarrow 6x \cdot (x + 1) = 0$$

Anwendung des Satzes vom Nullprodukt:

Gleichung I): $6x = 0 \Rightarrow x = 0$

Gleichung II): $x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$

Hinreichende Bedingung:

Prüfung für $x = 0$:

$f'''(0) = 6 \neq 0$, also Wendepunkt $W_1(0 | f(0)) \rightarrow W_1(0 | 1)$

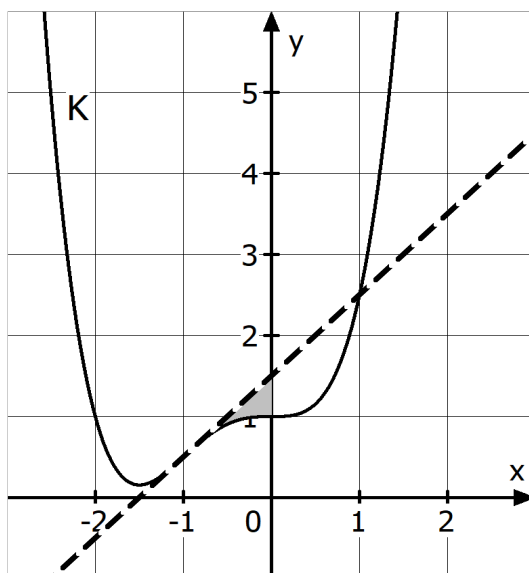
(dies entspricht dem Sattelpunkt, der sich bei der Berechnung der Extrempunkte bereits ergeben hat)

Prüfung für $x = -1$:

$f'''(-1) = -6 \neq 0$, also Wendepunkt $W_2(-1 | f(-1)) \rightarrow W_2(-1 | 0,5)$

Die Funktion besitzt zwei Wendepunkte, $W_1(0 | 1)$ und $W_2(-1 | 0,5)$

Zeichnen Sie K.



1.1.2 Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Berechne die Gleichung der Tangente an der Stelle $x = -1$ und danach die Fläche mit Hilfe eines Integrals.

Gleichung der Tangente an der Stelle $x = -1$:

Der Berührungspunkt entspricht dem Wendepunkt $W_2(-1 | 0,5)$

Ansatz: $y = mx + b$

Steigung der Tangente: $m = f'(-1) = 2 \cdot (-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 = 1$

Zwischenergebnis für die Gerade: $y = 1 \cdot x + b$

Einsetzen von $W_2(-1 | 0,5)$: $0,5 = 1 \cdot (-1) + b \Rightarrow b = 1,5$

Gleichung der Tangente: $y = x + 1,5$

Berechnung des Flächeninhalts (siehe Zeichnung in Aufgabe 1.1.1)

$$A = \int_{-1}^0 (x + 1,5 - (0,5x^4 + x^3 + 1))dx = \int_{-1}^0 (-0,5x^4 - x^3 + x + 0,5)dx$$

$$= \left[-0,1x^5 - 0,25x^4 + 0,5x^2 + 0,5x \right]_{-1}^0 = 0 - (0,1 - 0,25 + 0,5 - 0,5) = 0,15$$

Der Flächeninhalt beträgt $A = 0,15$ FE.

1.1.3 *Bestimmen Sie diesen Wert von m .*

Löse die Gleichung $f(x) = g(x)$.

Gemeinsamer Punkt der Funktionen $f(x)$ und $g(x)$:

$$0,5x^4 + x^3 + 1 = 0,5x^4 + x^3 + x^2 + mx + 2$$

$$\Rightarrow 1 = x^2 + mx + 2 \Rightarrow x^2 + mx + 1 = 0$$

Lösung der Gleichung mit der abc-Formel:

$$x_{1,2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2} = \frac{-m \pm \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

Bedingung, dass die Gleichung nur eine Lösung besitzt: $m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2$

Da $m > 0$ sein soll, ist $m = 2$ der gesuchte Wert.

1.2 *Das Schaubild C hat den Tiefpunkt $T(1/h(1))$.*

Das Schaubild von h muss bei $x = 1$ eine Nullstelle mit VZW haben.

Die Ableitungsfunktion besitzt an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$.

Das heißt, dass an der Stelle $x = 1$ ein Hochpunkt existiert.

Die Aussage ist falsch.

Es gibt Punkte, an denen C eine Normale mit Steigung $\frac{1}{6}$ hat.

Die Steigung der zugehörigen Tangente hat die Steigung $m = -6$.

Wenn die Steigung der Normale $\frac{1}{6}$ ist, beträgt die Steigung der Tangente

$$m_{\text{Tangente}} = \frac{-1}{\frac{1}{6}} = -6.$$

Da die Ableitungsfunktion nicht den Wert -6 annehmen kann, kann das Schaubild von h diese Tangentensteigung nicht annehmen.

Die Aussage ist falsch.