

Hauptprüfung Abiturprüfung 2017

Baden-Württemberg

Teil 1 (ohne Hilfsmittel)

Analysis, Stochastik, Vektorgeometrie, Matrizenrechnung

**berufliche Gymnasien
(AG, BTG, EG, SG, TG, WG)**

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Mai 2017

1 Analysis

1.1 Geben Sie die Nullstellen von f mit $f(x) = 3 \cdot x^3 - 27 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$ an.

(2 Punkte)

1.2 Die Funktion g erfüllt folgende Bedingungen:

$$g'(3) = 2$$

$$g''(3) = 0$$

$$g'''(3) \neq 0$$

Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?

(2 Punkte)

1.3 Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = e^{2x} - 4 \cdot x$, $x \in \mathbb{R}$

1.3.1 Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagerechte Tangente hat.

(3 Punkte)

1.3.2 Ermitteln Sie die Stammfunktion von h , deren Schaubild durch den Punkt $P(0/5)$ verläuft.

(3 Punkte)

1.4 Gegeben ist die Funktion p mit $p(x) = \cos(x)$, $x \in \mathbb{R}$

1.4.1 Es gilt: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 1$.

Bestimmen Sie, ohne Verwendung einer Stammfunktion, zwei verschiedene Werte für a , sodass gilt:

$$\int_a^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2$$

Erläutern Sie Ihre Vorgehensweise.

(3 Punkte)

1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q mit $q(x) = -\cos(x + 2)$, $x \in \mathbb{R}$ aus dem Schaubild von p hervorgeht.

(2 Punkte)

2 Stochastik

2.1 Ein Experiment gelingt in 50% aller Fälle.

Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal gelingt.

(3 Punkte)

2.2 A und B sind zwei beliebige Ereignisse.

Die Wahrscheinlichkeit, dass weder das Ereignis A noch das Ereignis B eintritt beträgt 42%. Die Wahrscheinlichkeit, dass A und das Gegenereignis von B eintritt, beträgt 28%. Die Wahrscheinlichkeit, dass B und das Gegenereignis von A eintritt, beträgt 18%.

Zeigen Sie: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

(4 Punkte)

3 Lineare Algebra: Vektorgeometrie

3 Gegeben sind die Geraden

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

und

$$g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, s \in \mathbb{R}$$

- 3.1 Untersuchen Sie die beiden Geraden auf ihre gegenseitige Lage. (3 Punkte)
- 3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_3 , die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet. (2 Punkte)
- 3.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_4 , die g_1 rechtwinklig schneidet. Geben Sie den Abstand von g_1 zur x_1x_2 -Ebene an. (3 Punkte)

3 Lineare Algebra: Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem.

$$\begin{array}{rrcr} 2 \cdot x & -3 \cdot y & +z & = 4 \\ -x & +y & +z & = 1 \\ & 2 \cdot y & +3 \cdot z & = 6 \end{array}$$

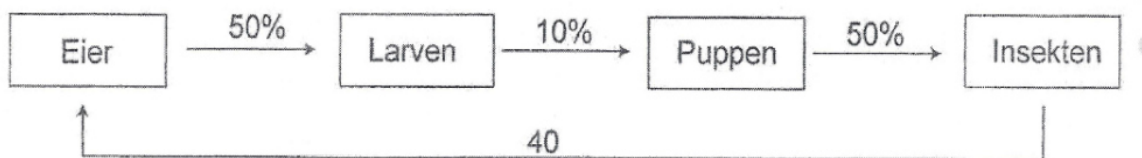
(3 Punkte)

3.2 In der Matrixgleichung $A \cdot B = C$ hat die Matrix A zwei Zeilen und vier Spalten. Die Matrix C ist eine quadratische Matrix.

Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix B ?

(2 Punkte)

3.3 Die Entwicklung einer Insektenpopulation wird durch folgendes Diagramm modelliert:



Aus 50% der Eier werden Larven, von denen sich 10% verpuppen. Aus 50% der Puppen schlüpfen die geschlechtsreifen Insekten, die pro Insekt 40 Eier legen und anschließend sterben.

Vereinfachend wird angenommen, dass jedes dieser vier Entwicklungsstadien jeweils 40 Tage benötigt.

Zu Beginn zählt man 10000 Eier, 4000 Larven, 600 Puppen und 300 Insekten. Wie viele Eier, Larven, Puppen und Insekten zählt man nach dem Modell nach 40 Tagen?

Begründen Sie, warum die Population nach dem obigen Modell nicht ausstirbt.

(3 Punkte)

Lösungen

1 Analysis

1.1 *Geben Sie die Nullstellen von f an.*

Bedingung: $f(x) = 0$

$$3x^3 - 27x = 0 \Rightarrow 3x \cdot (x^2 - 9) = 0 \quad \text{Anwendung des Satzes vom Nullprodukt}$$

$$\text{Gleichung I): } 3x = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{Gleichung II): } x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

Die Nullstellen von f sind $x = 0$, $x = -3$ und $x = 3$.

1.2 *Welche Aussagen lassen sich damit über das Schaubild der Funktion g treffen?*

Was sagt die erste und zweite Ableitung über das Schaubild von g aus?
Wie berechnet man Wendepunkte?

$$g'(3) = 2 :$$

An der Stelle $x = 3$ besitzt das Schaubild von g eine Tangente mit der Steigung 2.

$$g''(3) = 0 \text{ und } g'''(3) \neq 0 :$$

An der Stelle $x = 3$ besitzt das Schaubild von g eine Wendestelle.

1.3.1 *Bestimmen Sie den Punkt, an dem das Schaubild von h eine waagerechte Tangente hat.*

Bedingung für eine waagerechte Tangente: $h'(x) = 0$

$$\text{Aus } h(x) = e^{2x} - 4x \text{ folgt } h'(x) = 2e^{2x} - 4$$

$$\text{Bedingung: } 2e^{2x} - 4 = 0 \Rightarrow e^{2x} = 2 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \ln(2)$$

$$\text{y-Wert des Punktes: } h\left(\frac{1}{2} \ln(2)\right) = e^{2 \cdot \frac{1}{2} \ln(2)} - 4 \cdot \frac{1}{2} \ln(2) = e^{\ln(2)} - 2 \ln(2) = 2 - 2 \ln(2)$$

Der gesuchte Punkt lautet $A\left(\frac{1}{2} \ln(2) \mid 2 - 2 \ln(2)\right)$

- 1.3.2 Ermitteln Sie die Stammfunktion von h , deren Schaubild durch den Punkt $P(0/5)$ verläuft.

Ermittle zunächst alle Stammfunktionen und setze dann den gegebenen Punkt ein.

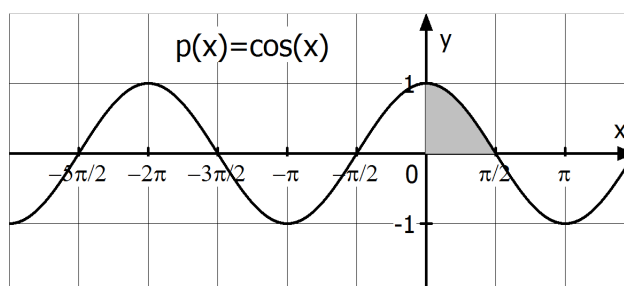
Stammfunktion von h : $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + C$

Bedingung: $H(0) = 5 \Rightarrow 5 = \frac{1}{2}e^0 - 2 \cdot 0 + C \Rightarrow C = 4,5$

Die gesuchte Stammfunktion lautet $H(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2x^2 + 4,5$

- 1.4.1 Bestimmen Sie zwei verschiedene Werte für a

Skizziere das Schaubild von $p(x)$ und markiere den gegebenen Flächeninhalt.



Durch das Integral ist vorgegeben, dass die graue Fläche in Inhalt 1 besitzt.

Für $a = -\frac{\pi}{2}$ wird die graue Fläche verdoppelt, als gilt $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2$

Für $a = -\frac{5\pi}{2}$ gilt ebenfalls $\int_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = 2$

Begründung: Die Flächenstücke oberhalb der x -Achse haben jeweils den Inhalt $A = 2$. Das Flächenstück unterhalb der x -Achse hat ebenfalls den Inhalt $A = 2$, wird aber bei dem Integral in negativer Form berücksichtigt.

- 1.4.2 Beschreiben Sie, wie das Schaubild von q aus dem Schaubild von p hervorgeht.

Welche Änderung des Schaubilds ergibt sich, wenn man x durch $x + 2$ ersetzt?
Was bedeutet die Multiplikation der Funktion mit -1

Ausgangsfunktion: $p(x) = \cos(x)$

1. Schritt: **Spiegelung an der x -Achse**: dies ergibt $r(x) = -\cos(x)$

2. Schritt: **Verschiebung des Schaubildes um 2 nach links**: dies ergibt
 $q(x) = -\cos(x + 2)$

2 Stochastik

- 2.1 Prüfen Sie, ob das Experiment bei viermaliger Durchführung mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mindestens einmal gelingt.

Berechne die Wahrscheinlichkeit mit Hilfe des Gegenereignisses.

Die Wahrscheinlichkeit wird mit Hilfe des Gegenereignisses berechnet:

$$P(\text{Experiment gelingt mindestens einmal}) = 1 - P(\text{Experiment gelingt nie})$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 1 - \frac{1}{16}$$

Da $\frac{1}{16} = 0,0625$ ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit $1 - 0,0625 = 0,9375 = 93,75\%$.

Das Experiment gelingt nicht mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 95% mehr als einmal.

- 2.2 Zeigen Sie: $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$

Trage die gegebenen Wahrscheinlichkeiten in eine Vierfeldertafel ein.

Folgende Wahrscheinlichkeiten sind gegeben:

$$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,42$$

$$P(A \cap \bar{B}) = 0,28$$

$$P(\bar{A} \cap B) = 0,18$$

Die Wahrscheinlichkeiten werden in eine Vierfeldertafel (fett gedruckt) eingetragen. Die restlichen Werte können dann ergänzt werden.

	A	$\bar{A}$	Summe
B	0,12	0,18	0,30
$\bar{B}$	0,28	0,42	0,70
Summe	0,40	0,60	1

Es gilt $P(A) = 0,40$ und $P(B) = 0,30$ und $P(A \cap B) = 0,12$

Es gilt $0,40 \cdot 0,30 = 0,12$ was zu zeigen war.

3 Vektorgeometrie

3.1 Untersuchen Sie die beiden Geraden auf ihre gegenseitige Lage.

Zeige zunächst, dass die Geraden nicht parallel sind.
Die Geraden müssen gleichgesetzt werden.

Die Geraden sind nicht parallel, da die Richtungsvektoren der beiden Geraden keine Vielfachen zueinander sind.

Es gibt kein Wert für k , so dass gilt: $k \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Die Geraden sind daher entweder windschief zueinander oder schneiden sich.

Prüfung durch Gleichsetzen der Geradengleichungen:

$$\begin{array}{rclcl} 1 & +4r & = & 2 & -s \\ 7 & +2r & = & 1 & -s \\ -2 & & = & 5 & +4s \end{array}$$

Aus der 3. Zeile folgt: $s = -\frac{7}{4} = -1,75$

Aus der 2. Zeile folgt: $7 + 2r = 1 + \frac{7}{4} \Rightarrow 2r = \frac{11}{4} - 7 \Rightarrow 2r = -\frac{17}{4} \Rightarrow r = -\frac{17}{8}$

Prüfung, ob die 1. Zeile stimmt:

$$1 + 4 \cdot \left(-\frac{17}{8}\right) = 2 - \left(-\frac{7}{4}\right) \Rightarrow 1 - \frac{17}{2} = 2 + \frac{7}{4} \Rightarrow -\frac{15}{2} = \frac{15}{4} \quad \text{falsche Aussage}$$

Die Geraden sind windschief zueinander.

3.2 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_3 , die sowohl g_1 als auch g_2 schneidet.

Wähle zwei Punkte A und B, die jeweils auf einer der beiden Geraden liegen.
Die gesuchte Gerade verläuft durch diese beiden Punkte.

Der Punkt A(1/7/-2) liegt auf der Gerade g_1 .

Der Punkt B(2/1/5) liegt auf der Gerade g_2 .

Gleichung der Gerade g_3 , die durch A und B verläuft: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 7 \end{pmatrix}$

3.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Geraden g_4 , die g_1 rechtwinklig schneidet.

Die gesuchte Gerade verläuft durch einen Punkt, der auf g_1 liegt.
Außerdem müssen die Richtungsvektoren zueinander orthogonal sein.

Die gesuchte Gerade g_4 verläuft durch den Punkt $A(1/7/-2)$.

Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ von g_4 muss senkrecht auf dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ stehen.

Es muss gelten: $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4a + 2b = 0$

Die Gleichung ist zum Beispiel erfüllt für $a = 1$ und $b = -2$ und $c = 0$.

Ein möglicher Richtungsvektor ist $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Es gibt jedoch auch andere Lösungen.

Eine mögliche Gleichung von g_4 : $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Geben Sie den Abstand von g_1 zur x_1x_2 -Ebene an.

Begründe, weshalb die Gerade parallel zur x_1x_2 -Ebene ist.
Der gesuchte Abstand kann am Richtungsvektor abgelesen werden.

Die Gerade g_1 ist parallel zur x_1x_2 -Ebene, da im Richtungsvektor die dritte Koordinate 0 ist.

Den Abstand der Gerade von der x_1x_2 -Ebene kann man anhand der dritten Koordinate des Ortsvektors ablesen.

Da diese Koordinate -2 ist, ist der gesuchte (positive) Abstand 2.

3 Mathematische Beschreibung von Prozessen durch Matrizen

3.1 Lösen Sie das nachfolgende lineare Gleichungssystem.

Bringe das Gleichungssystem auf eine Stufenform.

$$\begin{array}{rrcr} 2 \cdot x & -3 \cdot y & +z & = 4 \\ -x & +y & +z & = 1 \quad | \cdot 2 \\ 2 \cdot y & +3 \cdot z & & = 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{} \\ \leftarrow \end{array} +$$

$$\begin{array}{rrcr} 2 \cdot x & -3 \cdot y & +z & = 4 \\ & -y & +3z & = 6 \quad | \cdot 2 \\ 2 \cdot y & +3 \cdot z & & = 6 \end{array} \quad \begin{array}{c} \boxed{} \\ \leftarrow \end{array} +$$

$$\begin{array}{rrcr} 2 \cdot x & -3 \cdot y & +z & = 4 \\ & -y & +3z & = 6 \\ & & +9 \cdot z & = 18 \end{array}$$

Aus der 3. Zeile: $z = 2$

Aus der 2. Zeile: $-y + 3 \cdot 2 = 6 \Rightarrow y = 0$

Aus der 1. Zeile: $2x - 3 \cdot 0 + 2 = 4 \Rightarrow x = 1$

Die Lösungsmenge lautet $L = \{ (1; 0; 2) \}$ bzw. der Lösungsvektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

3.2 Wie viele Zeilen und Spalten hat die Matrix B ?

Für die Multiplikation zweier Matrizen gilt die allgemeine Regel: $(m,n) \cdot (n,k) = (m,k)$

Die Matrix A hat die Gestalt (2,4). Also ist $m = 2$ und $n = 4$.

Die Matrix C hat daher die Gestalt (2,k).

Da die Matrix quadratisch ist, muss auch $k = 2$ sein.

Die Matrix B hat daher die Gestalt (4,2).

Die Matrix B hat 4 Zeilen und 2 Spalten.

3.3 *Wie viele Eier, Larven, Puppen und Insekten zählt man nach dem Modell nach 40 Tagen?*

Stelle die Übergangsmatrix A auf und Berechne $A \cdot \vec{x}_0$

Die Übergangsmatrix lautet $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$

Die Startpopulation lautet $\vec{x}_0 = \begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix}$

Anzahl nach 40 Tagen: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10000 \\ 4000 \\ 600 \\ 300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12000 \\ 5000 \\ 400 \\ 300 \end{pmatrix}$

Nach 40 Tagen sind 12000 Eier, 5000 Larven, 400 Puppen und 300 Insekten vorhanden.

Begründen Sie, warum die Population nach dem obigen Modell nicht ausstirbt.

Multipliziere die positiven Zahlen aus der Übergangsmatrix.

Die allgemeine Übergangsmatrix lautet:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 40 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & v \\ a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 \end{pmatrix}$$

Es gilt $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot v = 0,5 \cdot 0,1 \cdot 0,5 \cdot 40 = 1$

Da das Ergebnis 1 ist, handelt es sich um einen zyklischen Prozess und stirbt nicht aus.

Nach 4 Zeitschritten (also 160 Tagen) ist der Bestand wieder am Ausgangszustand.