

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2016

Baden-Württemberg

Aufgabe 7 Mathematik in der Praxis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2016

Die Firma Schraubfix stellt Schrauben her. Die Gesamtkosten K werden durch eine Funktion 3. Grades dargestellt. Dabei entspricht x der Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ den Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE).

7.1

Bei einer Produktion von 9 ME entstehen Gesamtkosten in Höhe von 406 GE.

Die Grenzkosten haben ein Minimum bei 3 ME mit 7 GE pro ME. Die variablen Stückkosten bei 4 ME betragen 14 GE pro ME.

Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion K^* .

(6 Punkte)

Die Firma rechnet nach Umstrukturierungen mit der Gesamtkostenfunktion K mit

$$K(x) = x^3 - 9x^2 + 36x + 120 \text{ und der Erlösfunktion } E \text{ mit } E(x) = 54x.$$

Die Kapazitätsgrenze beträgt 10 ME.

7.2

Berechnen Sie Nutzenschwelle, Nutzengrenze, den maximalen Gewinn und die langfristige Preisuntergrenze.

(8 Punkte)

7.3

Auf welchen Wert kann der Verkaufspreis sinken, wenn das Gewinnmaximum bei 6 ME liegen soll ?

(3 Punkte)

7.4

Aufgrund von Rationalisierungsmaßnahmen können die Fixkosten um 50% reduziert werden, allerdings beträgt der Verkaufspreis nun 27 GE pro ME.

Überprüfen Sie, ob die Firma in dieser Situation einen positiven Gewinn erzielen kann.

(3 Punkte)

Die Länge der Schrauben wird als normalverteilt angenommen; Kontrollmessungen ergaben eine durchschnittliche Länge von $\mu = 50$ mm und eine Standardabweichung von $\sigma = 5$ mm.

Als Spitzenware gelten Schrauben, welche maximal 2% vom Durchschnitt abweichen.

Als Ausschussware gelten Produkte, welche mehr als 10% vom Durchschnitt abweichen.

7.5

Wie viel Prozent Ausschuss wird produziert ?

(3 Punkte)

7.6

Ein Profifachhändler möchte nur die Spitzenware der Schraubenproduktion vermarkten.

Welche Schraubenmenge sollte produziert werden, wenn er 15.000 Stück der Spitzenware benötigt ?

(4 Punkte)

7.7

Das Unternehmen möchte die längsten Schrauben aussortieren.

Welche Länge muss eine Schraube mindestens haben, damit maximal 5% der Schrauben aussortiert werden ?

(3 Punkte)

30 Punkte

Lösung

7.1

Funktionsterm Kostenfunktion

Ansatz für die Kostenfunktion:

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Zweite Ableitungsfunktion: $K''(x) = 6ax + 2b$

$$\text{variable Stückkostenfunktion: } k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x} = ax^2 + bx + c$$

Bedingungen:

Bei 9 ME Kosten von 406 GE: $K(9) = 406 \Rightarrow 729a + 81b + 9c + d = 406$

Bei 3 ME Grenzkosten 7 GE pro ME: $K'(3) = 7 \Rightarrow 27a + 6b + c = 7$

Bei 3 ME Grenzkostenminimum: $K''(3) = 0 \Rightarrow 18a + 2b = 0$

Bei 4 ME variable Stückkosten 14 GE pro ME: $k_v(4) = 14 \Rightarrow 16a + 4b + c = 14$

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR:

MATRIX[A] 4 x5 <pre> [729 81 9 -] [27 6 1 -] [18 2 0 -] [16 4 1 -] 1,1=729 </pre>	rref([A]) <pre> [1 0 0 0 1] [0 1 0 0 -9] [0 0 1 0 34] [0 0 0 1 100] </pre>
--	--

Es gilt $a = 1$, $b = -9$, $c = 34$ und $d = 100$.

Die Kostenfunktion lautet $K^*(x) = x^3 - 9x^2 + 34x + 100$

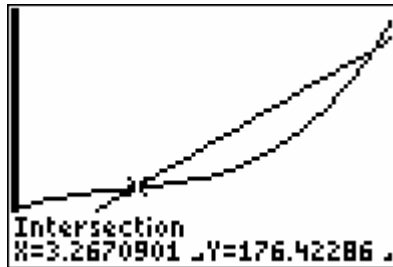
7.2

Nutzenschwelle und Nutzensgrenze:

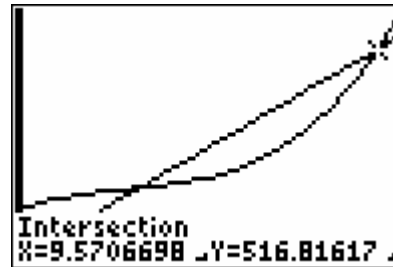
Die Nutzenschwelle und Nutzensgrenze entspricht den Schnittstellen der Schaubilder von $K(x)$ und $E(x)$.

Ansatz: $K(x) = E(x)$

Lösung mit dem GTR:



Nutzenschwelle: $x = 3,27$ ME



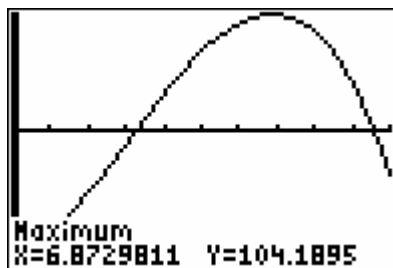
Nutzensgrenze: $x = 9,57$ ME

Maximaler Gewinn:

Die Gewinnfunktion lautet

$$G(x) = E(x) - K(x) = 54x - (x^3 - 9x^2 + 36x + 120) = -x^3 + 9x^2 + 18x - 120$$

Bedingung für maximalen Gewinn: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$



GTR: Der Gewinn wird maximal für $x = 6,87$ ME.

Der maximale Gewinn beträgt 104,19 GE.

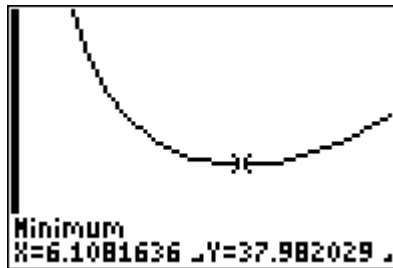
Langfristige Preisuntergrenze:

Die langfristige Preisuntergrenze ist die Minimalstelle der Stückkostenfunktion

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = \frac{x^3 - 9x^2 + 36x + 120}{x} = x^2 - 9x + 36 + \frac{120}{x}$$

Bedingung für die langfristige Preisuntergrenze: $k'(x) = 0$ und $k''(x) > 0$

GTR:



Das Betriebsoptimum (der x-Wert zur langfristigen Preisuntergrenze) beträgt $x = 6,11$ ME.
Die langfristige Preisuntergrenze beträgt $k(6,11) = 37,98$ ME.

7.3

Der Verkaufspreis sei p . Damit beträgt die Erlösfunktion $E(x) = p \cdot x$

Die Gewinnfunktion lautet nun

$$G(x) = E(x) - K(x) = px - (x^3 - 9x^2 + 36x + 120) = -x^3 + 9x^2 + px - 36x - 120$$

Damit ist $G'(x) = -3x^2 + 18x + p - 36$

Das Gewinnmaximum soll bei $x = 6$ ME liegen.

Es soll also gelten: $G'(6) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 36 + 18 \cdot 6 + p - 36 = 0 \Rightarrow p = 36$

Der Verkaufspreis kann auf 36 GE sinken.

7.4

Die neue Kostenfunktion lautet $K(x) = x^3 - 9x^2 + 36x + 60$

Die neue Erlösfunktion lautet $E(x) = 27x$

1. Lösungsmöglichkeit:

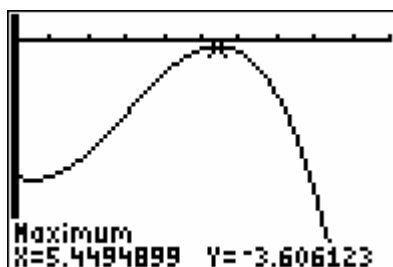
Die Gewinnfunktion lautet

$$G(x) = E(x) - K(x) = 27x - (x^3 - 9x^2 + 36x + 60) = -x^3 + 9x^2 - 9x - 60$$

Bestimmung des Gewinnmaximums:

Bedingung für maximalen Gewinn: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$

GTR:



Der maximale Gewinn beträgt -3,6 GE.

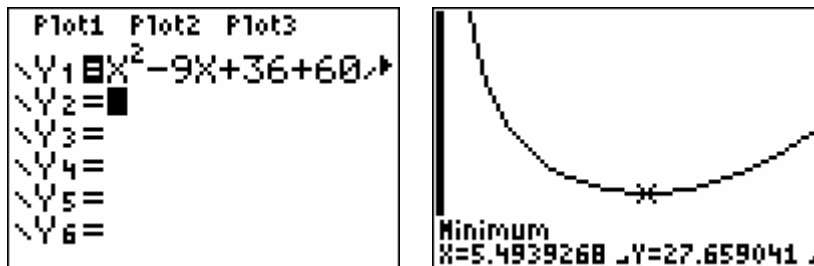
Das heißt, dass kein positiver Gewinn erzielt werden kann.

2.Lösungsmöglichkeit:

Die Stückkostenfunktion lautet $k(x) = \frac{x^3 - 9x^2 + 36x + 60}{x} = x^2 - 9x + 36 + \frac{60}{x}$

Das Minimum der Stückkostenfunktion entspricht der langfristigen Preisuntergrenze, bei der alle Kosten gedeckt sind.

Bestimmung des Minimums von $k(x)$:



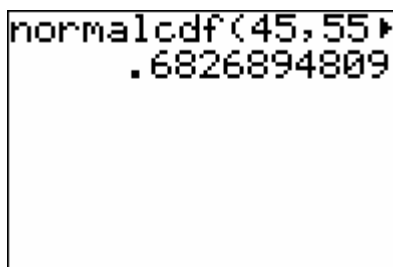
Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 27,66 GE.

Da der Preis nur 27 GE beträgt, kann es für keine Produktionsmenge einen positiven Gewinn geben.

7.5

Die Zufallsvariable X sei normalverteilt mit $\mu = 50$ mm und $\sigma = 5$ mm.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Schraube kein Ausschuss ist, beträgt $P(45 \leq X \leq 55) \approx 0,683$



Die Wahrscheinlichkeit für Ausschuss beträgt daher $1 - 0,683 = 0,317$.
Es werden also 31,7% Ausschuss produziert.

7.6

Die Spitzenware hat eine maximale Abweichung von 2% vom Durchschnitt (also eine Abweichung von $0,02 \cdot 50 = 1$ mm).

Man benötigt daher die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Schraubenlänge im Intervall zwischen 49mm und 51mm liegt.

$$P(49 \leq X \leq 51) \approx 0,1585$$

```
normalcdf(49,51▶
.1585193755
```

x sei nun die gesuchte Produktionsmenge.

Wenn 15.000 Stück der Spitzenware benötigt werden, dann gilt:

$$x \cdot 0,1585 = 15000 \Rightarrow x \approx 94637 \text{ Stück}$$

Es müssen also ca. 94.637 Stück hergestellt werden.

7.7

Gesucht ist nun die Schraubenlänge x, so dass alle Schrauben, die länger als x sind, nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% vorkommen.

Umgekehrt formuliert haben alle Schrauben, die eine Länge von höchstens x haben, einen Anteil von 95%.

Es soll also gelten: $P(X \leq x) \leq 0,95$

```
invNorm
area:0.95
μ:50
σ:5
Paste
```

```
invNorm(0.95,50▶
58.22426813
```

GTR: Es ist $x = 58,22$ mm.

Die Schrauben mit einer Länge von mindestens 58,22 mm sollten aussortiert werden.