

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2016

Baden-Württemberg

Aufgabe 6 Stochastik

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

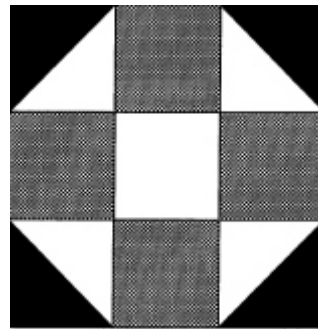
Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2016

Bei folgendem Spiel wird zweimal nacheinander ein Pfeil auf ein Brett, das in neun gleich große Quadrate aufgeteilt ist (siehe Abbildung rechts). Ist ein Quadrat in Dreiecke aufgeteilt, so nimmt jedes Dreieck eine halbe Quadratfläche ein. Die Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Flächenstück (weiß, grau oder schwarz) zu treffen entspricht dem jeweiligen Anteil an der Gesamtfläche. Fliegt ein Pfeil am Brett vorbei, so gilt der Wurf als nicht unternommen.



6.1

Erstellen Sie für dieses Spiel ein geeignetes Baumdiagramm und bestimmen Sie für alle Spielausgänge die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

(8 Punkte)

6.2

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

- A: Es wird zweimal weiß getroffen.
- B: Es wird zweimal die gleiche Farbe getroffen.
- C: Es wird mindestens einmal schwarz getroffen.
- D: Es wird genau einmal schwarz getroffen.

Formulieren Sie das Gegenereignis zu C.

(8 Punkte)

Das Team Orange einer Gemeinschaftsschule möchte am Schulfest dieses Spiel anbieten. Es hat folgende Regeln aufgestellt: Der Spieleinsatz beträgt 1 Euro. Für jeden Treffer in einem schwarzen Feld erhält der Spieler 1 Euro, für jeden Treffer in einem weißen Feld erhält er 0,25 Euro und für einen Treffer in einem grauen Feld erhält der Spieler nichts.

6.3

Mit welchem Gewinn kann Team Orange bei diesem Angebot rechnen, wenn 500 Personen am Spiel teilnehmen ?

(6 Punkte)

Das Team Blau der Gemeinschaftsschule bietet das Spiel unter veränderten Bedingungen beim Stadtfest an:

Es wird nur einmal geworfen, aber jetzt soll das Vorbeifliegen des Pfeiles am Brett mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,25 berücksichtigt werden. Fliegt der Pfeil am Brett vorbei, wird der Wurf nicht wiederholt. Der Spieler bekommt für einen Treffer in einem weißen Feld x Euro und für einen Treffer in einem schwarzen Feld ebenfalls x Euro.

Für einen Treffer im grauen Feld erhält der Spieler nichts.

Fliegt der Pfeil am Brett vorbei erhält der Spieler auch nichts.

6.4

Berechnen Sie die neuen Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse weiß, grau und schwarz, für den Wurf des Pfeils.

(3 Punkte)

6.5

Wie hoch muss der Auszahlungsbetrag x für das Treffen eines schwarzen bzw. eines weißen Feldes sein, wenn der Einsatz 0,50 Euro beträgt und Team Blau das Spiel fair gestalten möchte ?

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung

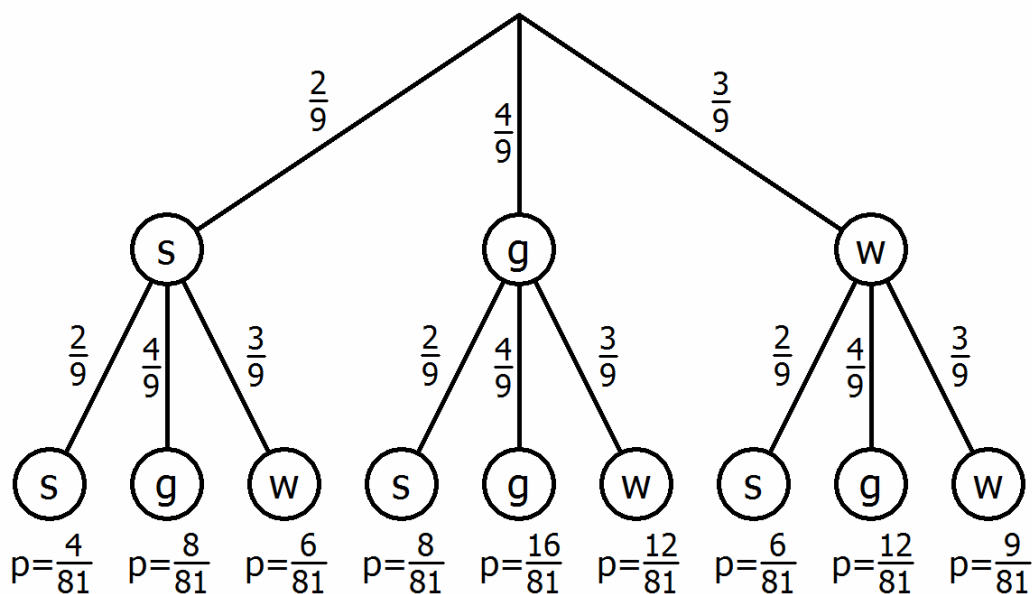
6.1

Zeichnung Baumdiagramm

Wahrscheinlichkeit für ein graues Feld : $\frac{4}{9}$

Wahrscheinlichkeit für ein weißes Feld: $\frac{3}{9}$

Wahrscheinlichkeit für ein schwarzes Feld: $\frac{2}{9}$



Rechenbeispiel: $P(sw) = \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{6}{81}$

6.2

$$P(A) = P(ww) = \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(B) = P(ss) + P(gg) + P(ww) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{29}{81}$$

$$P(C) = 1 - P(\text{kein schwarz})$$

$$P(\text{kein schwarz}) = P(gg) + P(gw) + P(wg) + P(ww) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} + \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{49}{81}$$

$$\Rightarrow P(C) = 1 - \frac{49}{81} = \frac{32}{81}$$

$$P(D) = P(C) - P(ss) = \frac{32}{81} - \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{28}{81}$$

Gegenereignis von C: Schwarz wird nicht getroffen.

6.3

Die Zufallsvariable X beschreibt den Gewinn von Team Orange pro Spiel.

Man benötigt nun den Erwartungswert von X .

Hierfür ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X erforderlich:

$$P(X = -1) = P(ss) = \frac{2}{9} \cdot \frac{2}{9} = \frac{4}{81}$$

$$P(X = 0) = P(gs) + P(sg) = 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

$$P(X = -0,25) = P(ws) + P(sw) = 2 \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{12}{81} = \frac{4}{27}$$

$$P(X = 0,5) = P(ww) = \frac{3}{9} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{9}$$

$$P(X = 0,75) = P(gw) + P(wg) = 2 \cdot \frac{3}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{24}{81} = \frac{8}{27}$$

$$P(X = 1) = P(gg) = \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$$

$$\text{Erwartungswert } E(X) = -1 \cdot \frac{4}{81} + 0 \cdot \frac{16}{81} - 0,25 \cdot \frac{4}{27} + 0,5 \cdot \frac{1}{9} + 0,75 \cdot \frac{8}{27} + 1 \cdot \frac{16}{81} = \frac{7}{18} \approx 0,39 \text{ €}$$

Pro Spiel kann Team Orange mit einem Gewinn von 0,39 € rechnen.

Bei 500 Spielen kann Team Orange also mit einem Gewinn von $500 \cdot \frac{7}{18} \text{ €} = 194,44 \text{ €}$ rechnen.

6.4

Die Wahrscheinlichkeit, dass man nicht auf die Scheibe trifft beträgt 0,25.

Die Wahrscheinlichkeit, dass man auf die Scheibe trifft beträgt 0,75.

$$P(\text{schwarz}) = 0,75 \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{weiß}) = 0,75 \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{4}$$

$$P(\text{grau}) = 0,75 \cdot \frac{4}{9} = \frac{1}{3}$$

6.5

Die Zufallsvariable Y bezeichnet beim Spiel von Team Blau den Gewinn des Spielers pro Spiel.

$$P(Y = -0,5) = P(\text{Pfeil trifft Scheibe nicht}) + P(\text{graues Feld}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{7}{12}$$

$$P(Y = x - 0,5) = P(\text{weißes Feld}) + P(\text{schwarzes Feld}) = \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$$

Das Spiel ist fair, wenn $E(Y) = 0$ gilt.

$$E(Y) = -0,5 \cdot \frac{7}{12} + (x - 0,5) \cdot \frac{5}{12} = 0 \Rightarrow -\frac{7}{24} + \frac{5}{12}x - \frac{5}{24} = 0 \Rightarrow \frac{5}{12}x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 1,2$$

Team Blau muss einen Auszahlungsbetrag von 1,20 Euro ansetzen um ein faires Spiel zu ermöglichen.