

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2016

Baden-Württemberg

Aufgabe 5 Wirtschaftliche Anwendungen

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2016

5.1

Lösen Sie die folgende Matrizengleichung nach X auf und treffen Sie eine Aussage über das Format der Matrix A . Die Matrix E ist eine Einheitsmatrix.

$$E - X \cdot A = B^2 - X$$

(4 Punkte)

5.2

Gegeben sind die Matrizen C und D mit $C = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $a, b \in \mathbb{Z}$

Bestimmen Sie die Werte von a und b so, dass gilt: $C^2 = D$.

Prüfen Sie, ob es Werte für a und b gibt, so dass gilt: $C \cdot D = D \cdot C$

(8 Punkte)

5.3

Welche Aussagen können Sie allgemein über die Anzahl von Lösungen von Linearen Gleichungssystemen machen?

Geben Sie jeweils ein entsprechendes lineares Gleichungssystem an.

(7 Punkte)

Die Firma NU&DEL stellt aus Weizen, Grieß, Wasser und Salz vier verschiedene Nudelteige N_1, N_2, N_3 und N_4 her. Diese werden zu den Nudelsorten S_1, S_2 und S_3 weiterverarbeitet.

Folgende Tabellen zeigen den Materialbedarf in Mengeneinheiten (ME):

	N_1	N_2	N_3	N_4
Weizen	12	20	8	7
Grieß	5	2	0	1
Wasser	5	1	2	1
Salz	4	3	4	2

	S_1	S_2	S_3
Weizen	121	190	271
Grieß	25	35	50
Wasser	32	45	63
Salz	41	62	87

5.4

Für eine Bestellung werden 70 ME S_1 , 90 ME S_2 und 100 ME S_3 produziert.

Welche Mengen an N_1, N_2, N_3 und N_4 werden dazu benötigt?

(5 Punkte)

5.5

Vor dem Betriebsurlaub befinden sich im Lager noch 280600 ME Weizen, 52000 ME Grieß, 91000 ME Salz und beliebig viel Wasser.

Wie viel ME Nudelsorten können hergestellt werden, wenn alle Lagerbestände aufgebraucht werden sollen?

Wie viel ME Wasser werden dazu benötigt?

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung

5.1

$$E - XA = B^2 - X \quad \xrightarrow{+X-E} \quad X - XA = B^2 - E$$

X ausklammern von links: $X \cdot (E - A) = B^2 - E$

Durchmultiplizieren mit $(E - A)^{-1}$ von rechts: $X = (B^2 - E) \cdot (E - A)^{-1}$

Format der Matrix X:

Die Matrix E ist eine quadratische Matrix.

Dann muss A auch eine quadratische Matrix sein, sonst wäre der Ausdruck $E - A$ nicht berechenbar.

5.2

$$C^2 = D \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ ab + 2b & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt $a^2 = 9 \Rightarrow a = \pm 3$

Für $a = 3$ gilt $3b + 2b = 3 \Rightarrow b = 0,6$ ist keine Lösung, da b nicht ganzzahlig ist

Für $a = -3$ gilt $-3b + 2b = 3 \Rightarrow b = -3$ ist eine Lösung.

Es ist $a = -3$ und $b = -3$.

$$C \cdot D = D \cdot C \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 9a & 0 \\ 9b + 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9a & 0 \\ 3a + 4b & 8 \end{pmatrix}$$

Für den Eintrag links unten muss gelten: $9b + 6 = 3a + 4b \Rightarrow 5b + 6 = 3a \Rightarrow a = \frac{5}{3}b + 2$

Es gibt hierfür unendlich viele Lösungen.

Wähle zum Beispiel $b = 3$, dann ergibt sich $a = 7$.

(Hinweis: Man muss darauf achten, dass man für eine durch drei teilbare Zahl wählt, ansonsten ergibt sich keine ganze Zahl für a).

5.3

Ein lineares Gleichungssystem besitzt entweder eine eindeutige Lösung oder gar keine Lösung oder unendlich viele Lösungen.

Beispiel für eindeutige Lösung:

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 5 \\ b & = & 7 \end{array}$$

Beispiel für keine Lösung:

$$\begin{array}{rcl} a + b & = & 5 \\ a + b & = & 7 \end{array}$$

Beispiel für unendlich viele Lösungen:

$$\begin{array}{rcl} a & +b & = 5 \\ 2a & +2b & = 10 \end{array}$$

5.4

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix $A = \begin{pmatrix} 12 & 20 & 8 & 7 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Rohstoff-Endprodukt-Matrix $C = \begin{pmatrix} 121 & 190 & 271 \\ 25 & 35 & 50 \\ 32 & 45 & 63 \\ 41 & 62 & 87 \end{pmatrix}$

Berechnung der Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix B:

$$A \cdot B = C \Rightarrow B = A^{-1} \cdot C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Gegeben ist der Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix}$

Gesucht ist der Zwischenproduktvektor $\vec{z}$: $\vec{z} = B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 70 \\ 90 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1430 \\ 550 \\ 1620 \\ 1650 \end{pmatrix}$

Es werden 1430 ME von N_1 , 550 ME von N_2 , 1620 ME von N_3 und 1650 ME von N_4 benötigt.

5.5

Gegeben ist $\vec{r} = \begin{pmatrix} 280600 \\ 52000 \\ r_3 \\ 91000 \end{pmatrix}$; gesucht ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

$$C \cdot \vec{p} = \vec{r} \Rightarrow \begin{pmatrix} 121 & 190 & 271 \\ 25 & 35 & 50 \\ 32 & 45 & 63 \\ 41 & 62 & 87 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 280600 \\ 52000 \\ r_3 \\ 91000 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{rrcr} 121p_1 & +190p_2 & +271p_3 & = & 280600 \\ 25p_1 & +35p_2 & +50p_3 & = & 52000 \\ 32p_1 & +45p_2 & +63p_3 & -r_3 & = & 0 \\ 41p_1 & +62p_2 & +87p_3 & = & 91000 \end{array}$$

Lösung des LGS mit dem GTR:

<pre> MATRIX[A] 4 x5 [121 190 271 - [25 35 50 - [32 45 63 - [41 62 87 - 1,1=121 </pre>	<pre> rref([A]) [1 0 0 0 100 [0 1 0 0 700 [0 0 1 0 500 [0 0 0 1 66200 </pre>
---	--

GTR:

Es können 100 ME von S_1 , 700 ME von S_2 und 500 ME von S_3 hergestellt werden.

Hierfür benötigt man 66200 ME Wasser.