

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2016

Baden-Württemberg

Aufgabe 4 Analytische Geometrie

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2016

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(2/2/5)$, $B(7/2/5)$ und $C(7/6/5)$.

4.1

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und berechnen Sie seine weiteren Innenwinkel. (8 Punkte)

4.2

Das Dreieck soll durch den Punkt D zu einem Rechteck ergänzt werden. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.

Zeichnen Sie das Rechteck in ein räumliches Koordinatensystem (x_2 – und x_3 -Achse:

1 LE = 1 cm ; x_1 -Achse: mit dem Schrägwinkel 45° und $1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$). (5 Punkte)

4.3

Erläutern Sie, welche besondere Lage das Rechteck ABCD hat. (2 Punkte)

4.4

Das Rechteck ABCD ist die Grundfläche einer senkrechten Pyramide mit der Spitze $S(4,5/4/-1)$

Bestimmen Sie die Koordinaten des Diagonalschnittpunktes des Rechtecks. Berechnen Sie den Inhalt der Mantelfläche der Pyramide. (7 Punkte)

Gegeben ist die Gerade h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

4.5

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden h mit der $x_2 - x_3$ -Ebene. (2 Punkte)

4.6

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte A und C verläuft. Weisen Sie nach, dass sich die Gerade g und die Gerade h nicht schneiden.

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung

4.1

Nachweis der Rechtwinkligkeit:

Zunächst werden die drei Seiten des Dreiecks als Vektoren dargestellt:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 5 \cdot 0 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0 = 0$$

Da das Skalarprodukt 0 ist, besitzt das Dreieck im Punkt B einen rechten Winkel, also $\beta = 90^\circ$

Innenwinkel des Dreiecks im Punkt A:

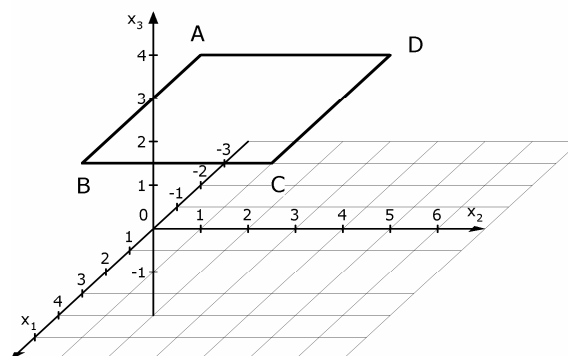
$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}}{5 \cdot \sqrt{25+16}} = \frac{25}{5 \cdot \sqrt{41}} \Rightarrow \alpha = 38,66^\circ$$

Innenwinkel des Dreiecks im Punkt C: $\gamma = 180^\circ - \beta - \alpha = 180^\circ - 90^\circ - 38,66^\circ = 51,34^\circ$

4.2

Um den Punkt D zu ermitteln, benötigt man den Ortsvektor des Punktes D.

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } D(2/6/5)$$



4.3

Alle Punkte des Rechtecks haben die x_3 -Koordinate 5.

Das Rechteck liegt daher parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene, um 5 Längeneinheiten nach oben verschoben.

4.4

Der Diagonalschnittpunkt des Rechtecks entspricht dem Mittelpunkt M der Strecke $\overline{AC}$:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } M(4,5/4/5).$$

Die Spitze S(4,5/4/-1) unterscheidet sich nur in der x_3 -Koordinate von M.

Die Spitze S steht daher senkrecht über dem Mittelpunkt M.

Die Mantelfläche der Pyramide besteht aus vier Dreiecksflächen, wobei jeweils zwei Dreiecksflächen gleich groß sind.

Dreiecksfläche ABS:

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{AB} \cdot h_1 \quad \text{mit } \overline{AB} = 5$$

Das Dreieck ABS ist gleichschenkelig, das heißt die Höhe h_1 trifft die Grundseite $\overline{AB}$ in ihrem Mittelpunkt.

$$\text{Mittelpunkt } M_{AB}: \overrightarrow{OM_{AB}} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4,5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } M_{AB}(4,5 / 2 / 5)$$

$$h_1 = \overline{M_{AB}S} = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 4 + 36} = \sqrt{40}$$

$$A_{ABS} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \sqrt{40} = 2,5 \cdot \sqrt{40} \approx 15,8$$

Dreiecksfläche BCS:

$$A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot \overline{BC} \cdot h_2 \quad \text{mit } \overline{BC} = 4$$

Das Dreieck BCS ist gleichschenkelig, das heißt die Höhe h_2 trifft die Grundseite $\overline{BC}$ in ihrem Mittelpunkt.

$$\text{Mittelpunkt } M_{BC}: \overrightarrow{OM_{BC}} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ also } M_{BC}(7 / 4 / 5)$$

$$h_2 = \overline{M_{BC}S} = \left| \begin{pmatrix} -2,5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6,25 + 0 + 36} = \sqrt{42,25} = 6,5$$

$$A_{BCS} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6,5 = 13$$

$$\text{Inhalt der Mantelfläche: } M = 2 \cdot A_{ABS} + 2 \cdot A_{BCS} = 2 \cdot 15,8 + 2 \cdot 13 = 57,6$$

4.5

Schnittpunkt der Gerade mit der $x_2 - x_3$ -Ebene:

Der Punkt auf der $x_2 - x_3$ -Ebene besitzt die allgemeinen Koordinaten $P(0 / x_2 / x_3)$.

$$\text{Einsetzen des Punktes P in die Gerade h: } \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Aus der 1. Zeile: } 0 = -1 - 2r \Rightarrow r = -0,5$$

$$\text{Aus der 2. Zeile folgt } x_2 = 3 - 0,5 \cdot (-2) = 4$$

$$\text{Aus der 3. Zeile folgt } x_3 = 1 - 0,5 \cdot (-2) = 2$$

$$\text{Schnittpunkt } S_{23}(0 / 4 / 2)$$

4.6

$$\text{Gleichung der Geraden g durch A und C: } g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Geraden g und h sind nicht parallel, da ihre Richtungsvektoren keine Vielfachen zueinander sind.

Gleichsetzen der Geraden ergibt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{array}{rcl} 2 + 5s & = & -1 - 2r \\ 2 + 4s & = & 3 - 2r \\ 5 & = & 1 - 2r \end{array}$$

$$\text{Aus der 3. Zeile folgt } 5 = 1 - 2r \Rightarrow r = -2$$

$$\text{Aus der 2. Zeile folgt } 2 + 4s = 3 - 2 \cdot (-2) \Rightarrow 4s = 5 \Rightarrow s = 1,2$$

$$\text{Kontrolle mit der 1. Zeile: } 2 + 5 \cdot 1,2 = -1 - 2 \cdot (-2) \Rightarrow 8 = 3$$

Dies ist eine falsche Aussage.

Die Geraden sind daher windschief und besitzen keinen Schnittpunkt.