

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2016

Baden-Württemberg

Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2016

Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x \quad \text{und} \quad g(x) = 4,5 \cos\left(\frac{1}{2}x\right) - 1,5, \quad x \in \mathbb{R}$$

Ihre Schaubilder sind K_f und K_g .

3.1

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse an.

Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Zeichnen Sie K_f .

(5 Punkte)

3.2

Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = x - \frac{4}{3}$ die Normale von K_f im Punkt

$P(-2/f(-2))$ ist.

(4 Punkte)

3.3

Bestimmen Sie die ersten beiden Ableitungen von g .

Geben Sie den Wertebereich der ersten Ableitungsfunktion von g an.

3.4

Untersuchen Sie K_g im Intervall $]43\pi; 45\pi[$ auf Krümmung.

Bestimmen Sie ein Intervall, in welchem beide Schaubilder K_f und K_g rechtsgekrümmt sind.

(5 Punkte)

3.5

K_f und K_g begrenzen zwei Flächenstücke.

Berechnen Sie die Differenz der Inhalte der beiden Flächenstücke.

(5 Punkte)

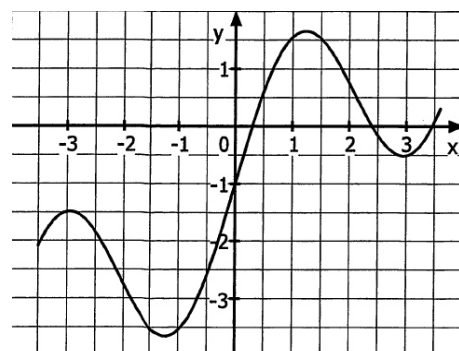
3.6

Gegeben ist das Schaubild einer

Funktion h .

Die folgenden Aussagen beziehen sich auf den gezeichneten Abschnitt.

Begründen Sie, ob sie wahr oder falsch sind.



a) $h(-1) - h(1) > 0$

b) Das Schaubild der Ableitungsfunktion besitzt drei Extrempunkte.

c) $\int_{-2}^2 h(x) dx < 0$

d) Das Schaubild einer Stammfunktion von h besitzt genau zwei Punkte mit waagrechtlicher Tangente.

(8 Punkte)

30 Punkte

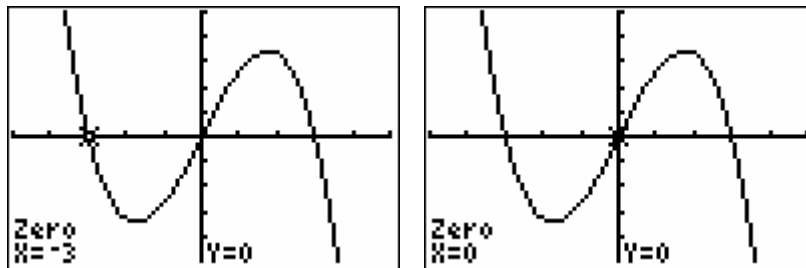
Lösung

3.1

Schnittpunkte mit der x-Achse:

Bedingung: $f(x) = 0$

GTR:

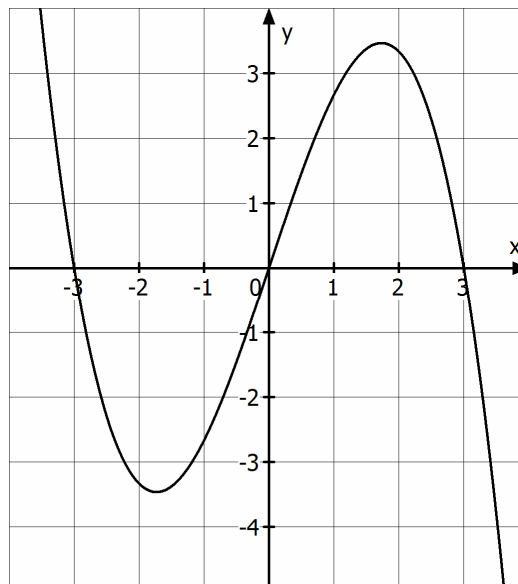


Schnittpunkte $N_1(-3 / 0)$; $N_2(0 / 0)$; $N_3(3 / 0)$

Symmetrie:

Das Schaubild K_f ist symmetrisch zum Ursprung, da die Funktionsgleichung nur ungerade Hochzahlen besitzt.

Zeichnung:



3.2

Es gilt $f'(x) = -x^2 + 3$

Steigung der Tangente an der Stelle $x = -2$: $f'(-2) = -4 + 3 = -1$

Steigung der Normalen an der Stelle $x = -2$: $m_{\text{Normale}} = -\frac{1}{m_{\text{Tangente}}} = -\frac{1}{-1} = 1$

Die Normale verläuft durch $P(-2/f(-2))$ mit $f(-2) = -\frac{10}{3}$

Ansatz für die Normalengleichung: $y = mx + b$

Einsetzen der bekannten Steigung und des Punktes $P(-2 / -\frac{10}{3})$:

$$-\frac{10}{3} = 1 \cdot (-2) + b \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$$

Die Gleichung der Normalen lautet $y = 1x - \frac{4}{3}$ was der angegebenen Geradengleichung entspricht.

3.3

Ableitungsfunktionen:

$$g'(x) = -4,5 \sin\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{4} \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right)$$

$$g''(x) = -\frac{9}{4} \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{9}{8} \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Die Amplitude der Ableitungsfunktion ist $\frac{9}{4}$ und das Schaubild der Ableitungsfunktion ist nicht nach oben oder unten verschoben.

Der Wertebereich von g' ist $[-\frac{9}{4}; \frac{9}{4}]$

3.4

Die Krümmung des Schaubildes K_g wird mit Hilfe der zweiten Ableitungsfunktion untersucht:

$$\text{Es ist } g''(43\pi) = -\frac{9}{8} \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 43\pi\right) = 0 \text{ und } g''(45\pi) = -\frac{9}{8} \cos\left(\frac{1}{2} \cdot 45\pi\right) = 0$$

An den beiden Stellen befinden sich somit Wendestellen.

Das Schaubild von g'' besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$

Da zwei benachbarte Wendestellen einer trigonometrischen Funktion immer einen Abstand einer halben Periode haben (hier also $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$) gibt es zwischen den Wendestellen bei

$x = 43\pi$ und $x = 45\pi$ keine weiteren Wendestellen.

Das heißt, dass das Schaubild von g in dem Intervall $]43\pi; 45\pi[$ einheitlich gekrümmt ist.

Wegen $g''(44\pi) = -1,125 < 0$ ist das Schaubild von g im Intervall $]43\pi; 45\pi[$ rechtsgekrümmt.

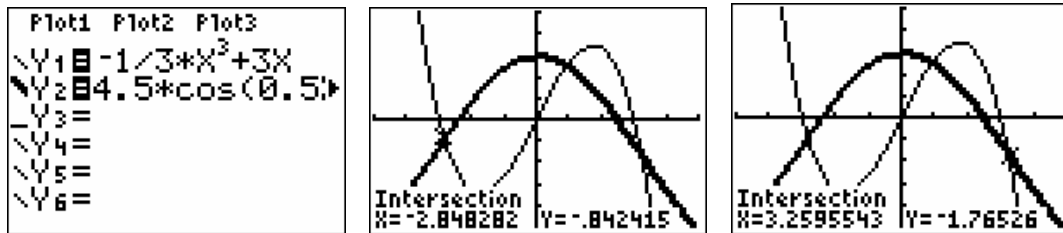
Für die Funktion f gilt $f''(x) = -2x$

Das Schaubild von f ist rechtsgekrümmt, wenn $f''(x) < 0 \Rightarrow -2x < 0 \Rightarrow x > 0$

Somit sind z.B. im Intervall $]43\pi; 45\pi[$ beide Schaubilder rechtsgekrümmt.

3.5

Skizze der Schaubilder mit dem GTR:



Schnittstellen der beiden Schaubilder: $f(x) = g(x)$

GTR: $x = -2,85$ und $x = 0,93$ und $x = 3,26$

Da nach der Differenz der beiden Flächenstücke gefragt wird, kann von der ganz linken zur ganz rechten Schnittstelle durchintegriert werden:

$$\int_{-2,85}^{3,26} (g(x) - f(x)) dx = 8,88$$

Die Differenz der Flächenstücke beträgt $A = 8,88$.

3.6

a) Die Aussage ist falsch.

Es ist $h(-1) \approx -3,5$ und $h(1) \approx 1,6$. Es gilt $h(-1) - h(1) = -3,5 - 1,6 < 0$

b) Die Aussage ist wahr, da das Schaubild von h drei Wendepunkte besitzt.

c) Die Aussage ist wahr.

$\int_{-2}^2 h(x) dx < 0$ bedeutet, dass im Intervall $[-2; 2]$ der größere Teil des Flächenstücks unterhalb der x -Achse liegt und dies stimmt mit dem gegebenen Schaubild überein.

d) Die Aussage ist falsch.

Besitzt das Schaubild der Stammfunktion von h eine waagrechte Tangente, dann besitzt das Schaubild h selbst dort eine Nullstelle.

Da das Schaubild von h drei Nullstellen besitzt, hat die Stammfunktion von h drei Punkte mit waagrechter Tangente.