

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2016

Baden-Württemberg

Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2016

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0,5x} - 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

2.1

Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_f mit der x -Achse.

Geben Sie die Gleichung der Asymptote von K_f an.

(3 Punkte)

2.2

Berechnen Sie die exakten Koordinaten des Extrempunktes von K_f .

Zeichnen Sie K_f .

(7 Punkte)

2.3

K_f , die x -Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen eine Fläche ein, die den Punkt $P(1/-1)$ enthält.

Berechnen Sie den exakten Inhalt dieser Fläche.

(4 Punkte)

2.4

Der Gerade mit der Gleichung $x = u$ mit $1 \leq u \leq 4,5$ schneidet K_f im Punkt P und die x -Achse im Punkt Q .

Die Punkte P , Q und $R(1/0)$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von u .

Berechnen Sie, für welchen Wert von u der Flächeninhalt maximal wird.

Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

(5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) - \frac{1}{3}x$, $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild ist K_g .

2.5

Geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von K_f und K_g an.

Zeigen Sie, dass sich K_f und K_g in einem ihrer Schnittpunkte senkrecht schneiden.

(5 Punkte)

2.6

Das Schaubild einer trigonometrischen Funktion h hat einen Hochpunkt in

$H(0 / \frac{2}{3})$. Der benachbarte Tiefpunkt hat die Koordinaten $T(\frac{\pi}{2} / -\frac{4}{3})$.

Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm von h .

Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Funktionen g und h ?

Begründen Sie mit Hilfe dieses Zusammenhangs, dass g an der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ eine

Wendestelle hat.

(6 Punkte)

30 Punkte

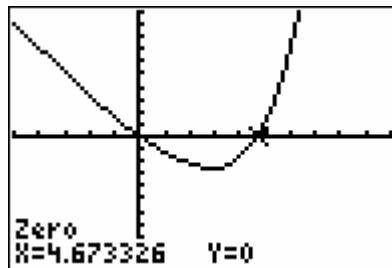
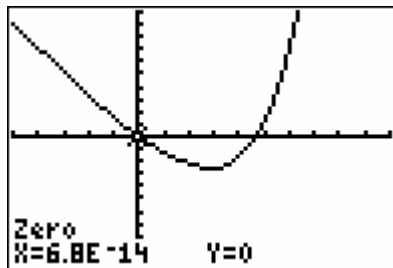
Lösung

2.1

Schnittpunkt mit der x-Achse:

Bedingung: $f(x) = 0$

GTR:



Die Schnittpunkte lauten $N_1(0 / 0)$ und $N_2(4,67 / 0)$

Asymptote:

Für $x \rightarrow -\infty$ existiert die schiefe Asymptote $y = -2x - 1$

2.2

Berechnung des Extrempunktes:

Ableitungen:

$$f'(x) = e^{0,5x} \cdot 0,5 - 2 = 0,5e^{0,5x} - 2 \quad \text{und} \quad f''(x) = 0,5e^{0,5x} \cdot 0,5 = 0,25e^{0,5x}$$

Bedingung für den Extrempunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

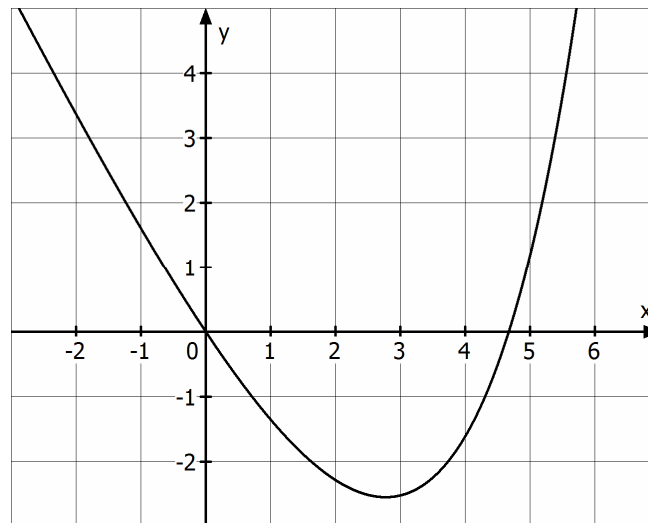
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0,5e^{0,5x} - 2 = 0 \Rightarrow e^{0,5x} = 4 \Rightarrow x = 2\ln(4)$$

$$f''(2\ln(4)) = 0,25e^{0,5 \cdot 2\ln(4)} = 1 > 0 \quad \text{also liegt ein Tiefpunkt vor}$$

$$\text{Es gilt } f(2\ln(4)) = e^{0,5 \cdot 2\ln(4)} - 2 \cdot 2\ln(4) - 1 = 3 - 4\ln(4).$$

Der Tiefpunkt besitzt die Koordinaten $T(2\ln(4) / 3 - 4\ln(4))$

Zeichnung:



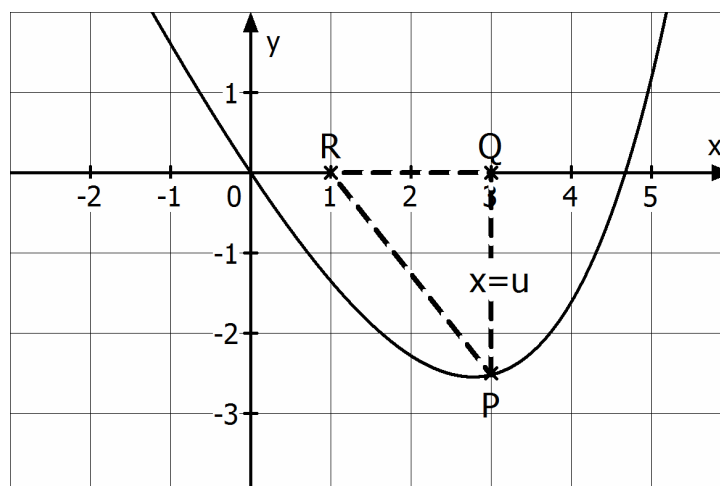
2.3

Die gesuchte Fläche hat die Integralgrenzen $x = 0$ und $x = 2$ und liegt unterhalb der x-Achse. Damit das Integral eine positive Zahl ergibt, wird es mit einem Minuszeichen versehen.

$$\text{Es gilt } A = -\int_0^2 (e^{0.5x} - 2x - 1) dx = -\left[2e^{0.5x} - x^2 - x \right]_0^2 = -(2e - 4 - 2 - (2 - 0 - 0)) = 8 - 2e$$

2.4

Skizze:

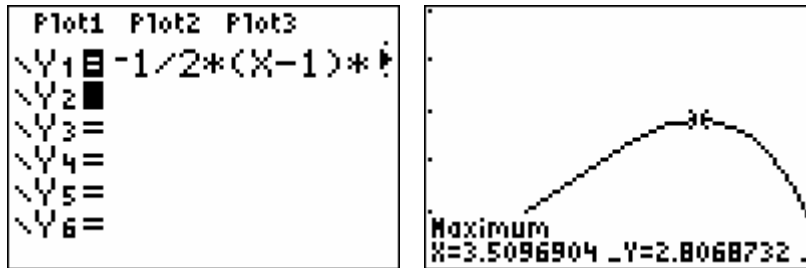


Koordinaten der Eckpunkte: $R(1/0)$; $P(u/f(u))$; $Q(u/0)$

$$\text{Flächeninhalt des Dreiecks: } A = \frac{1}{2} \cdot \overline{QR} \cdot \overline{PQ} = \frac{1}{2} \cdot (u - 1) \cdot (0 - f(u)) = -\frac{1}{2} (u - 1) \cdot f(u)$$

$$\text{Also lautet die Flächeninhaltsformel } A(u) = -\frac{1}{2} (u - 1) \cdot (e^{0.5u} - 2u - 1)$$

Lokales Maximum von $A(u)$ mit dem GTR:



$A(u)$ besitzt ein lokales Maximum für $u = 3,51$ mit $A(3,51) = 2,81$.

Untersuchung der Randwerte:

Es gilt $A(1) = 0 < 2,81$ und $A(4,5) = 0,9 < 2,81$.

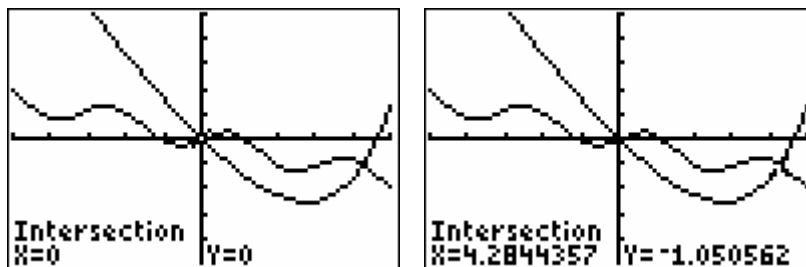
Damit ist das absolute Maximum $A = 2,81$.

2.5

Schnittpunkt der beiden Schaubilder:

Bedingung: $f(x) = g(x)$

GTR:



Die Schnittpunkte lauten $S_1(0/0)$ und $S_2(4,28/-1,05)$

Kontrolle des senkrechten Schnittes:

Es gilt $f'(x) = 0,5e^{0,5x} - 2$ und $g'(x) = \frac{1}{2}\cos(2x) \cdot 2 - \frac{1}{3} = \cos(2x) - \frac{1}{3}$

Zwei Schaubilder schneiden sich senkrecht, wenn $f'(x) \cdot g'(x) = -1$

Kontrolle für S_1 : Es gilt $f'(0) \cdot g'(0) = (0,5e^0 - 2) \cdot (\cos(0) - \frac{1}{3}) = -1,5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = -1$

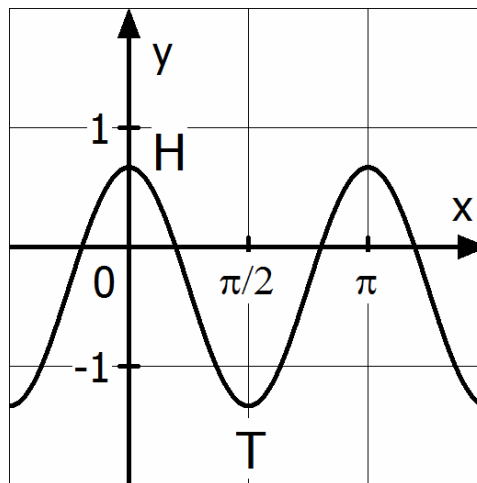
Die Schaubilder schneiden sich in S_1 senkrecht.

Kontrolle für S_2 : Es gilt $f'(4,28) \cdot g'(4,28) = (0,5e^{2,14} - 2) \cdot (\cos(8,56) - \frac{1}{3}) = -2,2$

Die Schaubilder schneiden sich in S_2 nicht senkrecht.

2.6

Skizze des Schaubildes anhand der Angaben des Hoch- und Tiefpunktes:



Da der Hochpunkt auf der y-Achse liegt, liegt es nahe, eine Kosinusfunktion als Funktionsansatz zu wählen:

$$h(x) = a \cdot \cos(kx) + d$$

Verschiebung d in y-Richtung: $d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{4}{3}}{2} = -\frac{1}{3}$

Amplitude: $a = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} = \frac{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}}{2} = 1$

Die Periode ist $p = \pi$. Daraus folgt $k = \frac{2\pi}{p} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$

Die Funktion lautet $h(x) = \cos(2x) - \frac{1}{3}$

Die Funktion $h(x)$ ist die Ableitungsfunktion von $g(x)$ bzw. $g(x)$ ist eine Stammfunktion von $h(x)$.

$g(x)$ besitzt bei $x = \frac{\pi}{2}$ eine Wendestelle, da das Schaubild ihrer Ableitungsfunktion $h(x)$ an

der Stelle $x = \frac{\pi}{2}$ eine Extremstelle besitzt.