

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2016

Baden-Württemberg

Aufgabe 1 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2016

1.1

Das Schaubild einer ganzrationalen Funktion 4. Grades ist symmetrisch zur y-Achse.
Es hat im Punkt H(-1/3) eine waagrechte Tangente und schneidet die y-Achse bei -4,5.
Bestimmen Sie den Funktionsterm. (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_f .

1.2

Geben Sie die Koordinaten der Extrempunkte von K_f an.
Berechnen Sie die exakte Gleichung einer der beiden Wendetangenten.
Zeichnen Sie K_f und diese Wendetangente. (10 Punkte)

1.3

K_f und die x-Achse begrenzen drei Teilflächen.
Bestimmen Sie den Flächeninhalt der größten Teilfläche mit Hilfe einer Stammfunktion. (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x - 4$, $x \in \mathbb{R}$. Ihr Schaubild ist K_g .

1.4

Die Gerade $x = u$ schneidet für $-4 \leq u \leq -1$ die beiden Schaubilder K_f und K_g in den Punkten P und Q.
Für welchen Wert von u ist der Abstand der Punkte P und Q maximal?
Geben Sie den maximalen Abstand an. (4 Punkte)

1.5

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = a \cdot e^{-x} + b$ mit $a, b, x \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$.
Geben Sie jeweils Werte für a und b an, so dass...

- (1)... die Funktion h monoton steigt.
- (2)... das Schaubild von h genau durch zwei Quadranten verläuft.
- (3)... die Gerade $y = 2$ waagrechte Asymptote des Schaubildes von h ist.

Gibt es Werte für a und b, für die alle drei Bedingungen (1) bis (3) gleichzeitig erfüllt sind?
Geben Sie diese Werte gegebenenfalls an.

(6 Punkte)

(30 Punkte)

Lösung

1.1

Bestimmung des Funktionsterms:

Ansatz: $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$ mit $f'(x) = 4ax^3 + 2bx$

Da das Schaubild symmetrisch zur y-Achse ist, tauchen nur gerade Hochzahlen im Funktionsterm von $f(x)$ auf.

Bedingungen:

$$f(-1) = 3 \Rightarrow a + b + c = 3$$

$$f'(-1) = 0 \Rightarrow -4a - 2b = 0$$

$$f(0) = -4,5 \Rightarrow c = -4,5$$

Lösung mit dem GTR:

```
MATRIX[A] 3 x4
[ 1  1  1  3 ]
[ -4 -2  0  0 ]
[  0  0  1 -4.5 ]

1, 1=1
```

```
rref([A])
[ 1  0  0 -7.5 ]
[ 0  1  0  15 ]
[ 0  0  1 -4.5 ]
```

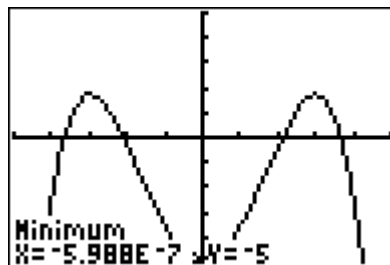
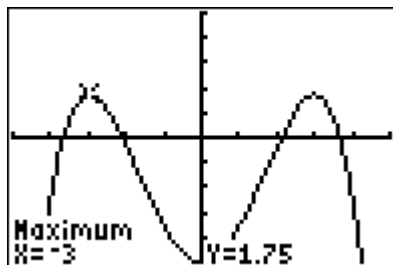
Es ist $a = -7,5$; $b = 15$; $c = -4,5$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = -7,5x^4 + 15x^2 - 4,5$

1.2

Hinreichende Bedingung für die Extrempunkte: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

GTR:



Hochpunkte: $H_1(-3 / 1,75)$ und $H_2(3 / 1,75)$; Tiefpunkt $T(0/-5)$

Zur Berechnung einer Wendetangente müssen zunächst die Wendepunkte des Schaubildes berechnet werden.

Es gilt $f(x) = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{2}x^2 - 5$ mit $f'(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x$ und $f''(x) = -x^2 + 3$ und $f'''(x) = -2x$

Hinreichende Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$\Rightarrow -x^2 + 3 = 0 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$$

$$f'''(-\sqrt{3}) = 2\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow W_1(-\sqrt{3} / f(-\sqrt{3})) \Rightarrow W_1(-\sqrt{3} / -1,25)$$

$$f'''(\sqrt{3}) = -2\sqrt{3} \neq 0 \Rightarrow W_2(\sqrt{3} / f(\sqrt{3})) \Rightarrow W_2(\sqrt{3} / -1,25)$$

Gleichung der Wendetangente im Punkt W_1 :

Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Es ist $u = -\sqrt{3}$: $y = f'(-\sqrt{3}) \cdot (x + \sqrt{3}) + f(-\sqrt{3})$ mit $f(-\sqrt{3}) = -1,25$ und

$$f'(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}(-\sqrt{3})^3 + 3(-\sqrt{3}) = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot (-\sqrt{3}) - 3\sqrt{3} = \sqrt{3} - 3\sqrt{3} = -2\sqrt{3}$$

Einsetzen der Werte in die Tangentengleichung:

$$y = -2\sqrt{3} \cdot (x + \sqrt{3}) - 1,25 \Rightarrow y = -2\sqrt{3} \cdot x - 7,25$$

Alternativ kann auch die Gleichung der Wendetangente im Punkt W_2 berechnet werden:

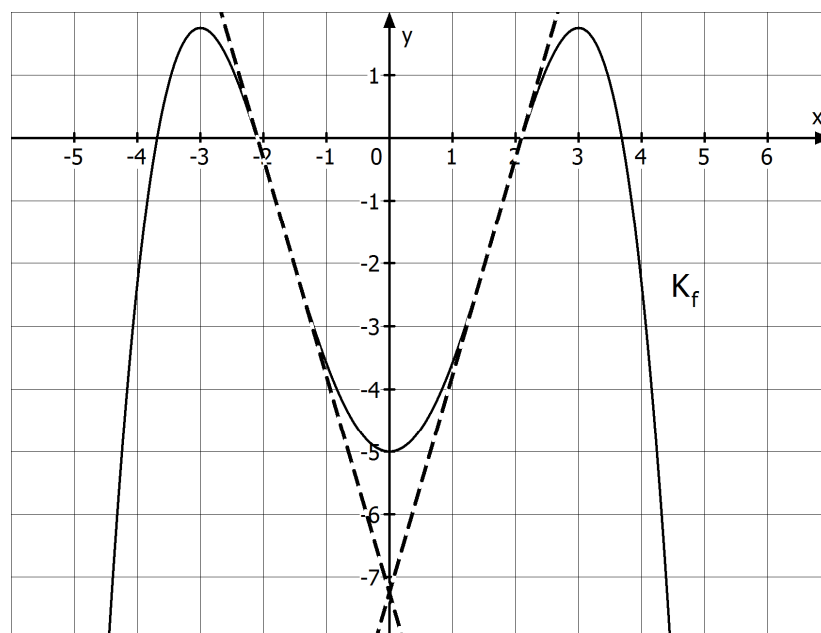
Allgemeine Tangentengleichung: $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Es ist $u = \sqrt{3}$: $y = f'(\sqrt{3}) \cdot (x - \sqrt{3}) + f(\sqrt{3})$ mit $f(\sqrt{3}) = -1,25$ und

$$f'(\sqrt{3}) = -\frac{1}{3}(\sqrt{3})^3 + 3\sqrt{3} = -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \sqrt{3} + 3\sqrt{3} = -\sqrt{3} + 3\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

Einsetzen der Werte in die Tangentengleichung: $y = 2\sqrt{3} \cdot (x - \sqrt{3}) - 1,25 \Rightarrow y = 2\sqrt{3} \cdot x - 7,25$

Zeichnung: (gestrichelte Geraden sind die Wendetangenten)



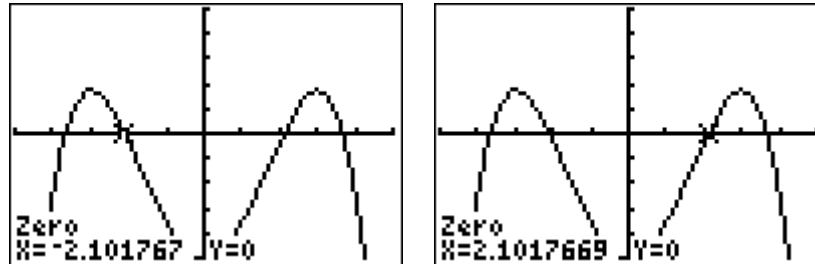
1.3

Anhand der Zeichnung erkennt man, dass die größte Teilfläche die mittlere Teilfläche unterhalb der x-Achse ist.

Die Grenzen des Integrals entsprechen den Nullstellen von $f(x)$:

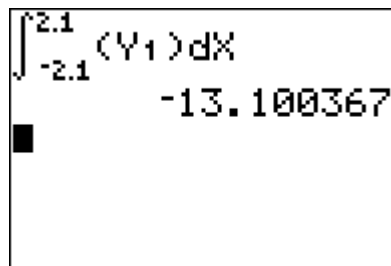
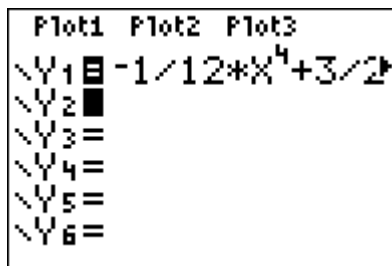
Bedingung für die Nullstellen von $f(x)$: $f(x) = 0$

GTR:



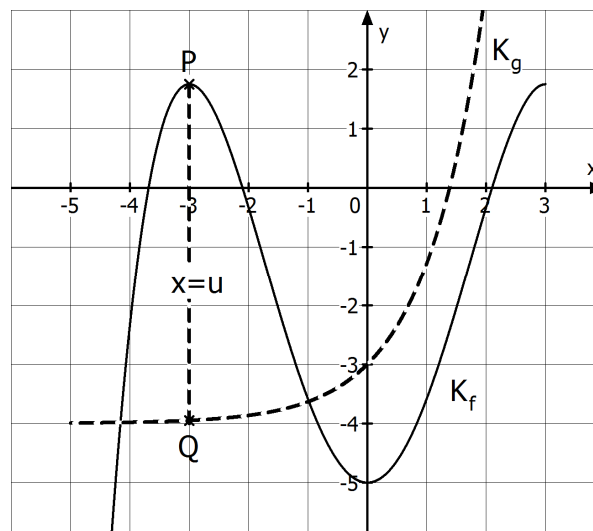
Die Nullstellen sind $x \approx \pm 2,1$

$$A = \left| \int_{-2,1}^{2,1} f(x) dx \right| = \left| \left[-\frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{2}x^3 - 5x \right]_{-2,1}^{2,1} \right| = 13,1 \quad (\text{GTR})$$



1.4

Skizze:

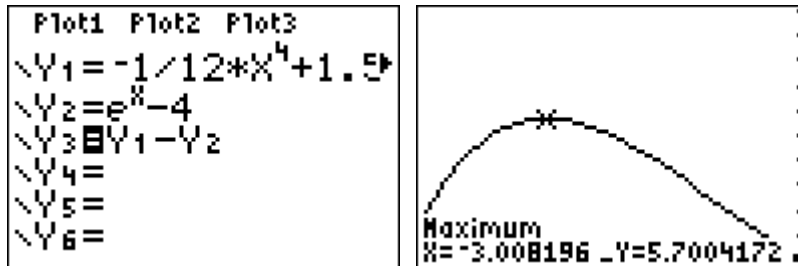


Koordinaten der Punkte: $P(u/f(u))$ und $Q(u/g(u))$

Der senkrechte Abstand der Punkte beträgt $\overline{PQ} = f(u) - g(u)$

Gesucht ist somit das absolute Maximum der Zielfunktion $d(u) = f(u) - g(u)$

Lokales Maximum mit dem GTR:



Das lokale Maximum von $d(u)$ wird erreicht für $u = -3$ mit $d(3) = 5,7$.

Untersuchung der Randwerte:

$$d(-4) = 1,648 < 5,7$$

$$d(-1) = 0,05 < 5,7$$

Da die Randwerte kleiner als 5,7 sind, ist das gesuchte absolute Maximum und damit der gesuchte maximale Abstand 5,7.

1.5

Es ist $h(x) = a \cdot e^{-x} + b$ mit $h'(x) = -ae^{-x}$

(1) Die Funktion h ist monoton steigend, wenn $h'(x) \geq 0$ ist.

$$\Rightarrow -a \cdot e^{-x} \geq 0$$

Da der Term e^{-x} immer positiv ist, muss folglich $-a \geq 0$ und daher $a \leq 0$ sein.

Da $a \neq 0$ vorgegeben ist, muss $a < 0$ sein.

Der Wert von b spielt keine Rolle.

Mögliche Werte sind also $a = -1$ und $b = 3$.

(2) Die Funktion $h(x)$ besitzt die waagrechte Asymptote $y = b$ für $x \rightarrow +\infty$.

Die Funktion $h(x)$ ist außerdem monoton steigend für $a < 0$ und monoton fallend für $a > 0$.

Es gibt 3 Fälle, bei denen das Schaubild von $h(x)$ durch 2 Quadranten verläuft:

1.Fall:

Ist $b \geq 0$ und $a > 0$ verläuft das Schaubild oberhalb der x -Achse und somit nur durch den 1. und 2. Quadrant. (mögliche Werte sind also $b = 2$ und $a = 3$).

2.Fall:

Ist $b \leq 0$ und $a < 0$ verläuft das Schaubild unterhalb der x -Achse und somit nur durch den 3. und 4. Quadrant. (mögliche Werte sind also $b = -2$ und $a = -3$)

3.Fall:

Verläuft das Schaubild von $h(x)$ durch den Ursprung, läuft es ebenfalls nur durch 2 Quadranten.

Das Schaubild verläuft durch $O(0/0)$, wenn $h(0) = 0 \Rightarrow a + b = 0 \Rightarrow a = -b$ gilt.

(mögliche Werte sind also z.B. $a = 4$ und $b = -4$ oder z.B. $a = -5$ und $b = 5$)

(3) Das Schaubild von h besitzt die waagrechte Asymptote $y = b$ für $x \rightarrow \infty$

Die Asymptote $y = 2$ ist vorhanden, wenn $b = 2$ ist (der Wert von a spielt keine Rolle)

Damit alle 3 Bedingungen erfüllt sind muss gelten:

aus (3): $b = 2$

aus (1): $a < 0$

aus (2): Da b positiv und a negativ ist, kann diese Bedingung nur noch erfüllt werden, wenn der 3.Fall aus (2) unterstellt wird: $a = -b$

Da $b = 2$ ist muss folglich $a = -2$ sein.

Die gesuchte Funktion lautet $h(x) = -2e^{-x} + 2$