

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2015

Baden-Württemberg

Aufgabe 7 Mathematik in der Praxis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Die Metall & Mehr KG hat sich auf die Herstellung von Unterlegscheiben für Schraubensysteme spezialisiert. Die Gesamtkosten K der Produktion lassen sich durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades darstellen. Dabei entspricht x der Produktionsmenge in Mengeneinheiten (ME) und $K(x)$ den Gesamtkosten in Geldeinheiten (GE).

7.1

Im Jahr 2014 betrug der konstante Verkaufspreis je ME 22 GE. Bei diesem Verkaufspreis lag die Nutzenschwelle bei 5 ME. Der Fixkostenanteil an den Gesamtkosten betrug 10 GE. Die variablen Stückkosten bei 4 ME betrugen 12 GE. Die Grenzkosten bei 4 ME betrugen 36 GE pro ME.

Bestimmen Sie die Erlösfunktion E sowie die Gesamtkostenfunktion K^* für das Jahr 2014.

(7 Punkte)

Für das Jahr 2015 erwartet der Betrieb nun die Gesamtkostenfunktion K mit $K(x) = 1,5x^3 - 13x^2 + 40x + 15$ und die Erlösfunktion E mit $E(x) = 19,5x$.

Es gilt $0 \leq x \leq 8$.

7.2

Zeichnen Sie die Schaubilder von E und K .

Berechnen Sie die Nutzenschwelle und die Nutzengrenze.

(6 Punkte)

7.3

Berechnen Sie die gewinnmaximale Produktionsmenge und den maximalen Gewinn.

(3 Punkte)

7.4

Berechnen Sie das Betriebsoptimum und die langfristige Preisuntergrenze. Wie groß ist der Gewinn im Betriebsoptimum?

Erläutern Sie, wie man mit Hilfe der Zeichnung aus 7.2 einen Näherungswert für das Betriebsoptimum ermitteln kann.

(5 Punkte)

7.5

Um welchen Betrag müssten die Fixkosten sinken, damit der maximale Gewinn um 10% steigt?

(3 Punkte)

Bei zwei Qualitätskontrollen im Januar 2015 und Februar 2015 wird der Innendurchmesser der Unterlegscheiben gemessen.

7.6

Bestimmen Sie den mittleren Innendurchmesser und die Standardabweichung für die Messung im Januar, wenn sich folgende Häufigkeitsverteilung ergibt.

(2 Punkte)

Durchmesser d in mm	3,18	3,19	3,20	3,21	3,22
Anzahl	30	210	430	290	40

7.7

Die Messung im Februar ergibt für die Unterlegscheiben einen durchschnittlichen Innendurchmesser von $\mu = 3,201$ mm und eine Standardabweichung von $\sigma = 0,007$ mm.

Liegt der Innendurchmesser außerhalb des Bereichs $3,19 \leq d \leq 3,21$, eignet sich eine Unterlegscheibe nicht mehr zum Verkauf.

Wie viel Prozent Ausschuss entsteht, wenn der Innendurchmesser normalverteilt ist ?

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung

7.1

Funktionsterm Gesamterlös

Gesamterlös = "Preis mal Menge"

$$E(x) = p \cdot x = 22 \cdot x$$

Funktionsterm Kostenfunktion

Ansatz für die Kostenfunktion:

$$K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Grenzkostenfunktion: $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

variable Stückkostenfunktion: $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = \frac{ax^3 + bx^2 + cx}{x} = ax^2 + bx + c$

Bedingungen:

Nutzenschwelle bei $x = 5$: $K(5) = E(5) \Rightarrow 125a + 25b + 5c + d = 110$

Fixkosten 10 GE: $K(0) = 10 \Rightarrow d = 10$

variable Stückkosten 12 GE bei $x = 4$: $k_v(4) = 12 \Rightarrow 16a + 4b + c = 12$

Grenzkosten 36 GE pro ME bei $x = 4$: $K'(4) = 36 \Rightarrow 48a + 8b + c = 36$

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR:

MATRIX[A] 4 x5 <pre> [125 25 5 -] [0 0 0 -] [16 4 1 -] [48 8 1 -] </pre> 1,1=125	rref([A]) <pre> [1 0 0 0 2] [0 1 0 0 -10] [0 0 1 0 20] [0 0 0 1 10] </pre>
--	--

Es gilt $a = 2$, $b = -10$, $c = 20$ und $d = 10$.

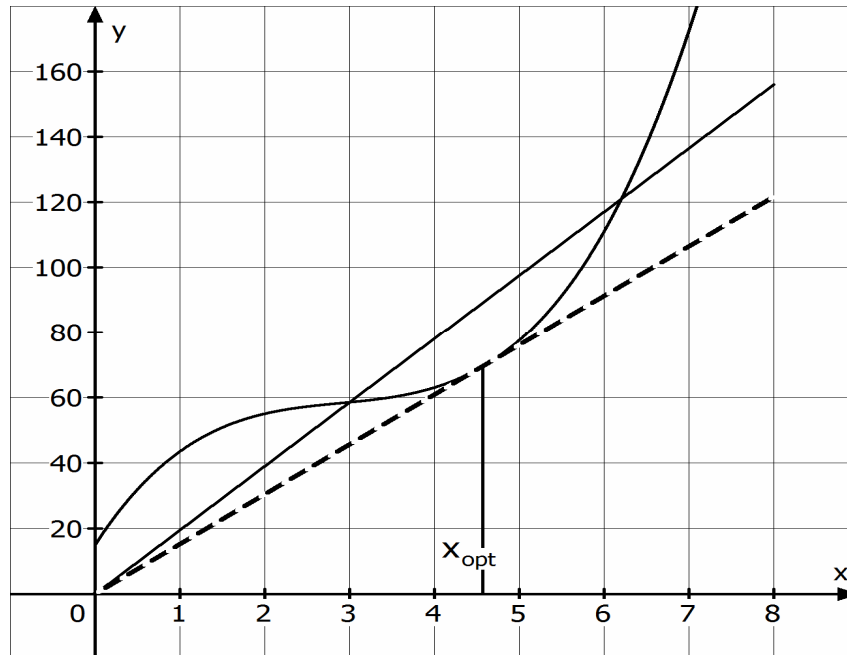
Die Kostenfunktion lautet $K^*(x) = 2x^3 - 10x^2 + 20x + 10$

7.2

Zeichnung

Hier ist auch das Ergebnis aus Aufgabe 7.4 enthalten (gestrichelte Gerade)

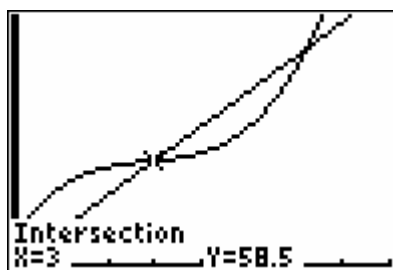
$$K(x) = 1,5x^3 - 13x^2 + 40x + 15 \quad E(x) = 19,5x$$



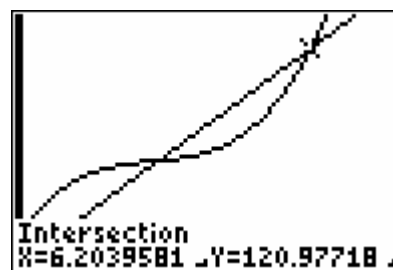
Die Nutzenschwelle und Nutzensgrenze entspricht den Schnittstellen der Schaubilder von $K(x)$ und $E(x)$.

Ansatz: $K(x) = E(x)$

Lösung mit dem GTR:



Nutzenschwelle: $x = 3$ ME

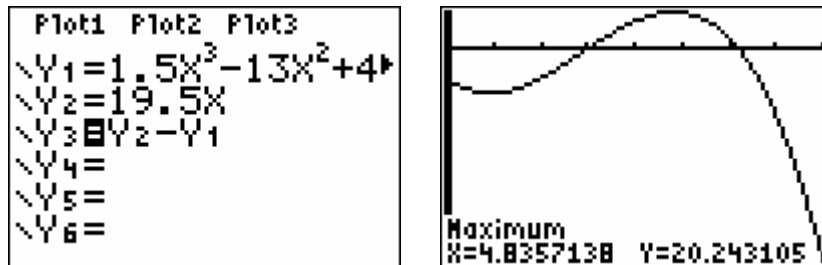


Nutzensgrenze: $x = 6,2$ ME

7.3

Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = E(x) - K(x)$

Bedingung für den maximalen Gewinn: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$



Die gewinnmaximale Menge beträgt $x \approx 4,84$ ME

Der maximale Gewinn beträgt $G(4,84) = 20,24$ GE

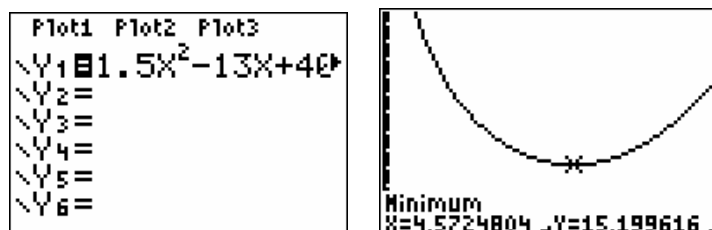
7.4

Betriebsoptimum

Das Betriebsoptimum entspricht der Minimalstelle der Stückkostenfunktion

$$k(x) = \frac{K(x)}{x} = 1,5x^2 - 13x + 40 + \frac{15}{x}$$

Lösung mit dem GTR:



Die Stückkostenfunktion wird minimal für $x = 4,57$. Daher liegt bei $x = 4,57$ das Betriebsoptimum vor.

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt $k(4,57) = 15,2$ GE.

Gewinn im Betriebsoptimum

Der Gewinn im Betriebsoptimum beträgt $G(4,57) = 19,65$ GE.

Betriebsoptimum aus der Zeichnung

Das Betriebsoptimum ergibt sich anschaulich durch das Anlegen einer Tangente an das Schaubild von $K(x)$ vom Ursprung aus (siehe gestrichelte Gerade in der Zeichnung in 7.2)

7.5

Der maximale Gewinn beträgt 20,24 GE.

Eine Erhöhung um 10% bedeutet eine Gewinnsteigerung von ca. $20,24 \cdot \frac{10}{100} \approx 2,02$ GE

Wenn die Fixkosten um 2,02 GE senken, steigert sich der Gewinn um 2,02 GE, also um 10%.

7.6

Der mittlere Innendurchmesser und die Standardabweichung kann mit dem GTR bestimmt werden:

L1	L2	L3	3
3.18	30		
3.19	210		
3.2	430		
3.21	290		
3.22	40		
---	---		
L3(1)=			

1-Var Stats
$\bar{x}=3.201$
$\Sigma x=3201$
$\Sigma x^2=10246.478$
$Sx=.0087793552$
$\sigma x=.0087749644$
$n=1000$

Der mittlere Innendurchmesser beträgt $\mu = 3,201$ mm

Die Standardabweichung beträgt $\sigma = 0,008877$ mm

7.7

X gibt den Innendurchmesser der Unterlegscheiben an.

Wahrscheinlichkeit, dass der Innendurchmesser im Intervall $3,19 \leq d \leq 3,21$ liegt:

$$P(3,19 \leq X \leq 3,21) = P(X \leq 3,21) - P(X \leq 3,19) = 0,843$$

normalcdf(-1E99▶
.8426869646

Die Wahrscheinlichkeit für einen Ausschuss beträgt $1 - 0,843 = 0,157 = 15,7\%$