

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2015

Baden-Württemberg

Aufgabe 6 Stochastik

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Hannes und Mattis spielen mit zwei identischen Spielzeughunden aus Plastik. Sie stellen folgendes fest: Wirft man einen Hund wie einen Würfel, so landet er in 6 von 10 Fällen auf der Seite, in 3 von 10 Fällen auf den Beinen und in 1 von 10 Fällen auf dem Rücken. Hannes und Mattis spielen nun ein Spiel. Dazu wird jeder Hund einmal geworfen.

6.1

Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm für ein Spiel und geben Sie für jedes mögliche Ergebnis die zugehörige Wahrscheinlichkeit an.

(6 Punkte)

6.2

Bestimmen sie die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse:

A: Beide Hunde landen auf dem Rücken.

B: Mindestens ein Hund landet auf dem Rücken.

C: Beide Hunde haben unterschiedliche Landepositionen.

D: Kein Hund landet auf der Seite.

E: Genau ein Hund landet auf den Beinen.

(9 Punkte)

6.3

Nun spielen Hannes und Mattis um Geld: Wenn beide Hunde auf der Seite landen, muss Hannes an Mattis 5 Cent bezahlen. Wenn beide Hunde auf den Beinen landen, muss Hannes an Mattis 15 Cent bezahlen. Wenn beide Hunde auf dem Rücken landen, muss Mattis an Hannes 2 € bezahlen.

In allen anderen Fällen werden keine Zahlungen fällig. Ist das Spiel fair ?

(4 Punkte)

6.4

Der Auszahlungsbetrag von Hannes an Mattis für das Ereignis "beide Hunde landen auf der Seite" soll so angepasst werden, dass Mattis im Durchschnitt pro Spiel mindestens 30 Cent gewinnt.

Ansonsten bleibt das Spiel unverändert. Wie hoch muss dieser Auszahlungsbetrag mindestens sein ?

(4 Punkte)

6.5 Hannes sagt: "In Deutschland gibt es über 80 Millionen Menschen. Wenn jeder die beiden Hunde einmal wirft, so werden mindestens 800.000 Menschen das Ereignis A (beide Hunde landen auf dem Rücken) würfeln." Nehmen Sie zu dieser Aussage Stellung.

(3 Punkte)

6.6

Beim Spielen bricht einem der Hunde ein Bein ab. Dadurch verändern sich die Wahrscheinlichkeiten folgendermaßen: Er landet in 7 von 10 Fällen auf der Seite, in 1 von 10 Fällen auf den Beinen und in 2 von 10 Fällen auf dem Rücken.

Der andere Hund bleibt unverändert.

Untersuchen Sie, ob unter dieser veränderten Bedingung das in 6.3 beschriebene Spiel für Hannes günstig ist.

(4 Punkte)

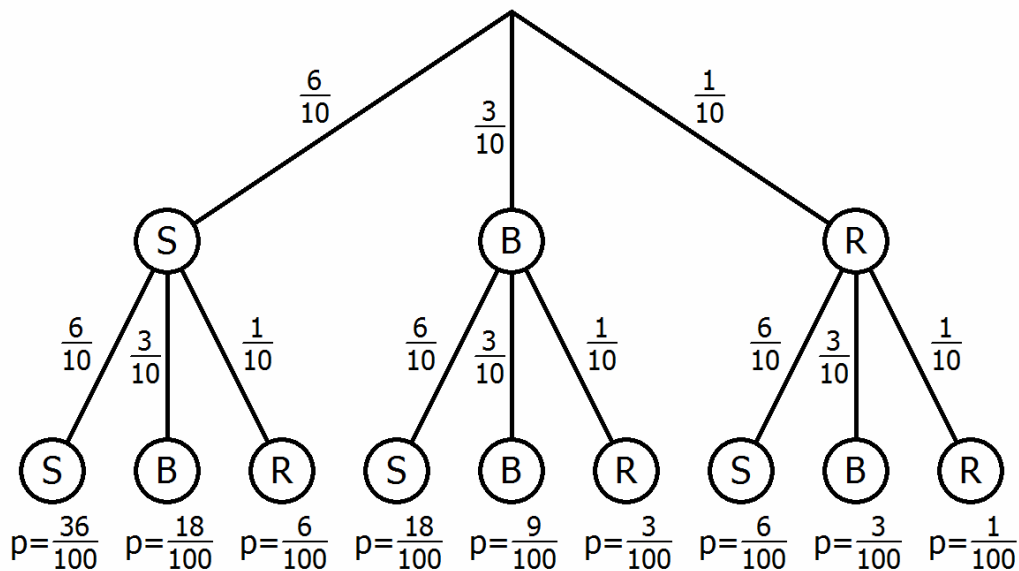
30 Punkte

Lösung

6.1

Zeichnung Baumdiagramm

Abkürzungen: S = Seite ; B = Beine ; R = Rücken



Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Spielausgänge ergeben sich durch Multiplikation der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Beispiel: $P(SB) = \frac{6}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{18}{100}$

6.2

$$P(A) = P(RR) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

$$P(B) = P(RS, RB, RR, SR, BR) = \frac{6}{100} + \frac{3}{100} + \frac{1}{100} + \frac{6}{100} + \frac{3}{100} = \frac{19}{100} = 0,19$$

$$P(C) = 1 - P(SS, BB, RR) = 1 - \left(\frac{36}{100} + \frac{9}{100} + \frac{1}{100} \right) = \frac{54}{100} = 0,54$$

$$P(D) = P(BB, BR, RB, RR) = \frac{9}{100} + \frac{3}{100} + \frac{3}{100} + \frac{1}{100} = \frac{16}{100} = 0,16$$

$$P(E) = P(SB, BS, BR, RB) = \frac{18}{100} + \frac{18}{100} + \frac{3}{100} + \frac{3}{100} = \frac{42}{100} = 0,42$$

6.3

Um zu prüfen, ob ein Spiel fair ist, muss geprüft werden, ob der erwartete Gewinn von Hannes oder Mattis Null ist.

Die Zufallsvariable X sei der Gewinn von Mattis in Cent.

Folgende Werte kann X annehmen:

Ereignis	SS	BB	RR	Sonst
Gewinn X von Mattis	5	15	-200	0
Wahrscheinlichkeit	0,36	0,09	0,01	0,54

Es gilt $P(\text{Sonst}) = 1 - 0,36 - 0,09 - 0,01 = 0,54$.

Erwartungswert von X :

$$E(X) = 5 \cdot 0,36 + 15 \cdot 0,09 - 200 \cdot 0,01 + 0 \cdot 0,54 = 1,15 \text{ Cent}$$

Das Spiel ist nicht fair, da der $E(X)$ ungleich Null ist.

6.4

Nun ändert sich der Gewinn von X beim Ereignis "SS". Der Gewinn sei a Cent.

Ereignis	SS	BB	RR	Sonst
Gewinn X von Mattis	a	15	-200	0
Wahrscheinlichkeit	0,36	0,09	0,01	0,54

Bedingung: Mattis gewinnt im Durchschnitt mindestens 30 Cent pro Spiel: $E(X) \geq 30$

$$E(X) = a \cdot 0,36 + 15 \cdot 0,09 - 200 \cdot 0,01 + 0 \cdot 0,54 \geq 30 \Rightarrow a \geq 85,1 \text{ Cent}$$

Der gesuchte Auszahlungsbetrag muss mindestens 86 Cent sein.

6.5

Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A beträgt $P(A) = \frac{1}{100}$ (siehe Aufgabe 6.2)

Wenn 80 Millionen Menschen das Spiel spielen ist zu erwarten dass ungefähr

$$\frac{1}{100} \cdot 80.000.000 = 800.000 \text{ mal das Ereignis } A \text{ eintritt.}$$

Das Ereignis muss jedoch nicht zwangsläufig "mindestens 800.000 mal" auftreten.

Es könnte natürlich auch weniger als 800.000 mal das Ereignis A eintreten.

Die Aussage von Hannes ist falsch.

6.6

Es wird angenommen, dass beim Hund, der als zweites geworfen wird, ein Bein abgebrochen ist.

Für den zweiten Hund gilt: $P(S) = \frac{7}{10}$ und $P(B) = \frac{1}{10}$ und $P(R) = \frac{2}{10}$

Ereignis	SS	BB	RR	Sonst
Gewinn X von Mattis	5	15	-200	0
Wahrscheinlichkeit	$\frac{6}{10} \cdot \frac{7}{10} = 0,42$	$\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,03$	$\frac{1}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0,02$	0,53

Erwartungswert von X:

$$E(X) = 5 \cdot 0,42 + 15 \cdot 0,03 - 200 \cdot 0,02 + 0 \cdot 0,53 = -1,45 \text{ Cent.}$$

Da Mattis nun im Durchschnitt 1,45 Cent pro Spiel verliert, ist das Spiel für Hannes günstig.