

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2015

Baden-Württemberg

Aufgabe 5 Wirtschaftliche Anwendungen

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

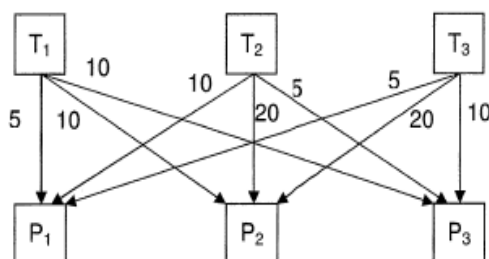
www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Ein Pharmakonzern stellt aus fünf Wirkstoffen W_1, W_2, W_3, W_4 und W_5 drei verschiedene Tabletten T_1, T_2 und T_3 her. Diese Tabletten werden in drei unterschiedlichen Packungen P_1, P_2 und P_3 an Apotheken ausgeliefert.

Die Tabelle links gibt an, wie viele Mengeneinheiten (ME) der einzelnen Wirkstoffe für je eine Tablette benötigt werden. Das Verflechtungsdiagramm rechts zeigt, wie viele Tabletten in je einer Packung sind.

	T_1	T_2	T_3
W_1	1	0	1
W_2	0	1	0
W_3	2	3	0
W_4	2	0	3
W_5	0	0	2



Die folgende Tabelle zeigt die Kosten für die Wirkstoffe und die Fertigungskosten für die Tabletten in Geldeinheiten pro Mengeneinheit (GE/ME):

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	T_1	T_2	T_3
Kosten	0,01	0,05	0,20	0,02	0,05	0,05	0,15	0,20

Beim Verpacken der Tabletten in die Packungen (P_1, P_2 und P_3) fallen je Packung Kosten von

0,40 GE an. Dem Pharmakonzern entstehen fixe Kosten von 300 GE.

Eine Apotheke bestellt 100 P_1 , 80 P_2 und 50 P_3 .

5.1

Frau Maier reagiert allergisch auf den Wirkstoff W_4 . Bei der Einnahme welcher Tabletten muss Frau Maier mit einer allergischen Reaktion rechnen?

(2 Punkte)

5.2

Erstellen Sie eine Tabelle, die den Bedarf an Wirkstoffen je Packung zeigt.

Welche Mengen an Wirkstoffen werden für den Auftrag der Apotheke benötigt?

(6 Punkte)

Berechnen Sie die Gesamtkosten für diesen Auftrag.

(5 Punkte)

5.3

Für einen anderen Auftrag werden doppelt so viele Verpackungen P_1 wie P_3 bestellt.

Dafür benötigt man 21500 ME des Wirkstoffs W_3 . Von Wirkstoff W_2 braucht man 2750 ME weniger als von Wirkstoff W_1 . Wie viele Packungen P_1, P_2 und P_3 werden bestellt?

Wie viele Mengeneinheiten der Wirkstoffe werden dazu benötigt?

(7 Punkte)

5.4

Gegeben sind die folgenden Matrizen:

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 11 & 13 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & -a \\ 2b & c \\ c & b \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0,5 & 1 & -1,5 \\ 0 & 2 & 0,5 \end{pmatrix}$$

Bezeichnen Sie die Matrizen mit A, B und C so, dass gilt: $2 \cdot A \cdot B = C$.
Berechnen Sie die Werte für a, b und c.

(6 Punkte)

5.5

Gegeben ist die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix E ist die Einheitsmatrix.

Lösen Sie die Matrixgleichung $AX + 2E = A + X$ nach X auf.
Berechnen Sie X.

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung

5.1

Der Wirkstoff W_4 ist gemäß der Tabelle in den Tabletten T_1 und T_3 enthalten.

Daher muss Frau Maier bei Einnahme der Tabletten T_1 und T_3 mit allergischen Reaktionen rechnen.

5.2

Die Wirkstoffe werden nun als "Rohstoffe", die Tabletten als "Zwischenprodukte" und die Packungen als Endprodukte interpretiert.

Tabelle, die Bedarf an Wirkstoffen je Packung anzeigt:

$$\text{Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{anhand der dargestellten Tabelle})$$

$$\text{Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix } B = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 10 \\ 10 & 20 & 5 \\ 5 & 20 & 10 \end{pmatrix} \quad (\text{siehe Verflechtungsdiagramm})$$

$$\text{Gesucht ist die Rohstoff-Endprodukt-Matrix } C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 10 & 20 & 5 \\ 40 & 80 & 35 \\ 25 & 80 & 50 \\ 10 & 40 & 20 \end{pmatrix}$$

[A]*[B]

10	30	20
10	20	5
40	80	35
25	80	50
10	40	20

Bedarf an Wirkstoffen je Packung:

	P_1	P_2	P_3
W_1	10	30	20
W_2	10	20	5
W_3	40	80	35
W_4	25	80	50
W_5	10	40	20

Wirkstoffmenge für den Auftrag der Apotheke:

Der Auftrag der Apotheke entspricht dem Endproduktvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Rohstoffvektor $\vec{r}$.

$$\text{Es gilt } \vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 10 & 20 & 5 \\ 40 & 80 & 35 \\ 25 & 80 & 50 \\ 10 & 40 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4400 \\ 2850 \\ 12150 \\ 11400 \\ 5200 \end{pmatrix} \quad (\text{GTR})$$

Für den Auftrag der Apotheke werden 4400 ME von W_1 , 2850 ME von W_2 , 12150 ME von W_3 , 11400 ME von W_4 und 5200 ME von W_5 benötigt.

Gesamtkosten für den Auftrag:

Kostenvektor für Rohstoffe: $\vec{k}_R = (0,01 \quad 0,05 \quad 0,20 \quad 0,02 \quad 0,05)$

Kostenvektor für die Umwandlung in das Zwischenprodukt: $\vec{k}_Z = (0,05 \quad 0,15 \quad 0,20)$

Kostenvektor für die Umwandlung in das Endprodukt: $\vec{k}_E = (0,40 \quad 0,40 \quad 0,40)$

$$\text{Kosten für die Rohstoffe (Wirkstoffe): } \vec{k}_R \cdot C \cdot \vec{p} = (9,6 \quad 20,9 \quad 9,45) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} = 3104,50 \text{ GE}$$

Kosten für die Umwandlung in das Zwischenprodukt (Tabletten):

$$\vec{k}_Z \cdot B \cdot \vec{p} = (2,75 \quad 7,5 \quad 3,25) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 80 \\ 50 \end{pmatrix} = 1037,50 \text{ GE}$$

Kosten für die Umwandlung in das Endprodukt (Packungen): $\vec{k}_E \cdot \vec{p} = 92$

Gesamtkosten: $K = 3104,50 + 1037,50 + 92 + 300 = 4534 \text{ GE}$

5.3

Anzahl der bestellten Packungen:

Endproduktvektor des anderen Auftrags: $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2p_3 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Rohstoffvektor des anderen Auftrags: $\vec{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1 - 2750 \\ 21500 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix}$

Es gilt $C \cdot \vec{p} = \vec{r}$:

$$\begin{pmatrix} 10 & 30 & 20 \\ 10 & 20 & 5 \\ 40 & 80 & 35 \\ 25 & 80 & 50 \\ 10 & 40 & 20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2p_3 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_1 - 2750 \\ 21500 \\ r_4 \\ r_5 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Nach dem Ausmultiplizieren der Gleichung (*) ergibt sich aus den ersten 3 Zeilen folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 40p_3 + 30p_2 - r_1 &= 0 \\ 25p_3 + 20p_2 - r_1 &= -2750 \\ 115p_3 + 80p_2 &= 21500 \end{aligned}$$

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR ergibt: $p_3 = 100$; $p_2 = 125$; $r_1 = 7750$

Es werden $2 \cdot 100 = 200$ ME von P_1 und 125 ME von P_2 und 100 ME von P_3 bestellt.

Mengeneinheiten der Wirkstoffe:

Aus den Zeilen 4 und 5 der Gleichung (*) und der bereits bekannten Größen ergibt sich

$$100p_3 + 80p_2 = r_4 \Rightarrow r_4 = 20000$$

$$40p_3 + 40p_2 = r_5 \Rightarrow r_5 = 9000$$

Es werden 7750 ME von W_1 , 5000 ME von W_2 , 21500 ME von W_3 , 20000 ME von W_4 und 9000 ME von W_5 benötigt.

5.5

$$\begin{aligned}
 AX + 2E &= A + X && \xrightarrow{-X-2E} AX - X = A - 2E && \Rightarrow (A - E)X = A - 2E \quad | \cdot (A - E)^{-1} \text{ von links} \\
 &&& \Rightarrow X = (A - E)^{-1} \cdot (A - 2E)
 \end{aligned}$$

Berechnung von X mit dem GTR:

$ \begin{aligned} &([A] - [E])^{-1} \cdot ([A] - 2E) \\ &\begin{bmatrix} 3.428571429 & . & . \\ 1.428571429 & 1 & . \\ -1.857142857 & . & . \end{bmatrix} \end{aligned} $	$ \begin{aligned} &\text{Ans} \rightarrow \text{Frac} \\ &\begin{bmatrix} \frac{24}{7} & \frac{1}{7} & \frac{24}{7} \\ \frac{10}{7} & \frac{8}{7} & \frac{17}{7} \\ -\frac{13}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{13}{7} \end{bmatrix} \end{aligned} $
--	---

Es gilt
$$X = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 24 & 1 & 24 \\ 10 & 8 & 17 \\ -13 & -2 & -13 \end{pmatrix}$$