

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2015

Baden-Württemberg

Aufgabe 4 Analytische Geometrie

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

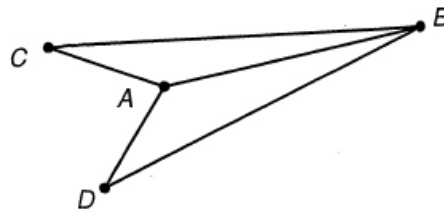
Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Ein Papierflieger befindet sich kurz nach dem Abwurf im Steigflug. Die Eckpunkte des Fliegers sind zu diesem Zeitpunkt gegeben mit: $A(4/5/3)$, $B(4/9/5)$, $C(1/3/2)$, $D(7/3/2)$.



Ansicht von oben

4.1

Zeichnen Sie den Papierflieger in ein räumliches Koordinatensystem ein (x_2 - und x_3 -Achse mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$ und x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45° und

$1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$). (4 Punkte)

4.2

Der Flieger bewegt sich entlang der Geraden g durch A und B. Bestimmen Sie eine Gleichung dieser Geraden. Ermitteln Sie den Spurpunkt von g in der $x_1 - x_2$ -Ebene. Die Gerade h verläuft durch die Punkte C und D. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von g und h . Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h rechtwinklig schneiden. (10 Punkte)

4.3

Bestimmen Sie im Dreieck DBA den Winkel β in B. Berechnen Sie den Flächeninhalt dieser Flügelfläche DBA. (5 Punkte)

4.4

Die Fliegerspitze B bewegt sich nun entlang der Geraden mit der Gleichung:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$$

In der Nähe befindet sich auf einer Anhöhe eine Pyramide mit der Spitze $S(4/19/t)$. Welchen Wert müsste t haben, so dass der Papierflieger mit seiner Spitze B die Pyramide in S trifft ?

Berechnen Sie unter Verwendung der ursprünglichen Koordinaten von B den Abstand von B zu S. (4 Punkte)

4.5

Die Grundfläche dieser quadratischen Pyramide hat die Eckpunkte $P(-2/15/2)$, $Q(8/13/2)$, $R(10/23/2)$ und T. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes T.

Welche Höhe müsste die Pyramide haben, damit ihr Volumen 416 VE beträgt ?

Bestimmen Sie die Koordinaten einer möglichen Spitze.

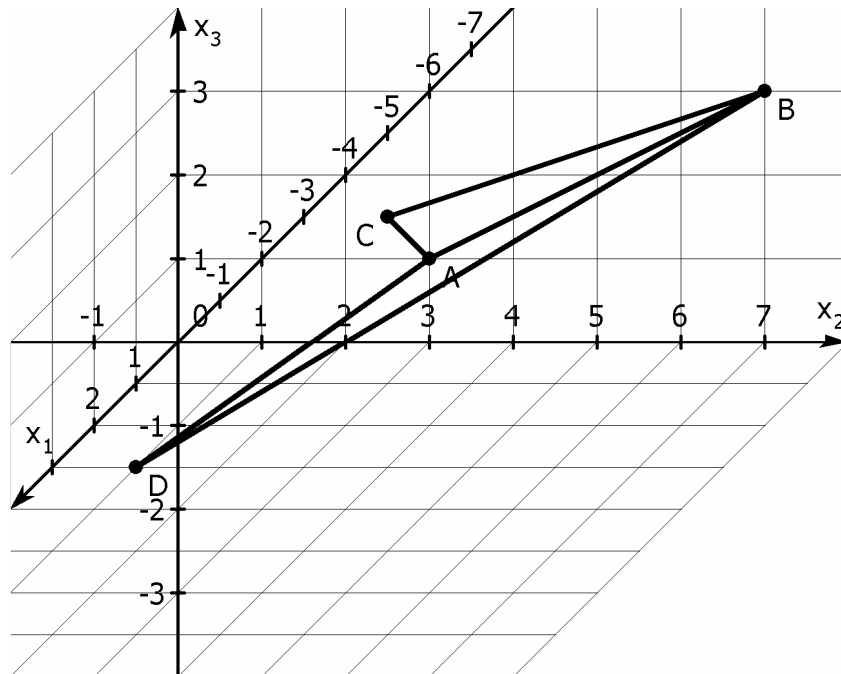
(7 Punkte)

30 Punkte

Lösung

4.1

Zeichnung



4.2

Gleichung der Gerade durch A und B:

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Spurpunkt von g:

Der Spurpunkt in der $x_1 - x_2$ -Ebene besitzt den x_3 -Wert 0.

Daher muss die dritte Zeile der Geradengleichung gleich Null gesetzt werden:

$$x_3 = 3 + 2r = 0 \Rightarrow r = -1,5$$

Einsetzen von $r = -1,5$ in die Gerade ergibt den Spurpunkt $S_{12}(4 / -1 / 0)$

Gleichung der Geraden h:

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OC} + s \cdot \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Schnittpunkt der Geraden g und h:

Da laut Aufgabenstellung angegeben ist, dass die Geraden einen Schnittpunkt besitzen, braucht man mögliche andere Lagen der Geraden (z.B. Parallelität) nicht prüfen.

Gleichsetzen der Geraden:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 4 & = & 1 + 6s \\ 5 + 4r & = & 3 \\ 3 + 2r & = & 2 \end{array}$$

Aus Zeile 1: $4 = 1 + 6s \Rightarrow s = 0,5$

Aus Zeile 2: $5 + 4r = 3 \Rightarrow r = -0,5$

Aus Zeile 3: $3 + 2r = 2 \Rightarrow r = -0,5$

Einsetzen von $s = 0,5$ in die Gerade h ergibt den Schnittpunkt $S(4/3/2)$.

Schnittwinkel von g und h:

Zwei Geraden schneiden sich rechtwinklig, wenn die Richtungsvektoren orthogonal zueinander sind (wenn also das Skalarprodukt der Richtungsvektoren Null ergibt).

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot 6 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Damit beträgt der Schnittwinkel $\alpha = 90^\circ$.

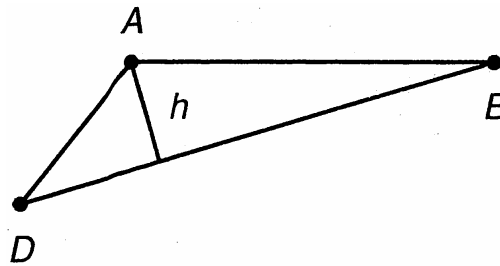
4.3

Berechnung des Winkels:

Der Winkel β wird gebildet durch die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BD}$.

$$\cos \beta = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BD}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}}{\sqrt{16+4} \cdot \sqrt{9+36+9}} = \frac{30}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{54}} \approx 0,913 \Rightarrow \beta \approx 24,1^\circ$$

Berechnung des Inhalts der Flügelfläche DBA:



Formel für die Flächeninhalt: $A = \frac{1}{2} \cdot |\overline{DB}| \cdot h$

$$\text{Es gilt } |\overline{DB}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 36 + 9} = \sqrt{54}$$

Für die Höhe h des Dreiecks gilt:

$$\sin \beta = \frac{h}{|\overline{AB}|} \Rightarrow h = |\overline{AB}| \cdot \sin 24,1^\circ = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \right| \cdot \sin 24,1^\circ \approx \sqrt{20} \cdot \sin 24,1^\circ = 1,826$$

Für die Dreiecksfläche gilt $A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{54} \cdot 1,826 = 6,71$ Flächeneinheiten

4.4

Berechnung von t:

Der Punkt S soll auf der gegebenen Geraden liegen.

$$\text{Punktprobe für S: } \begin{pmatrix} 4 \\ 19 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$$

aus Zeile 1 ergibt sich: $4 = 4$

aus Zeile 2 ergibt sich: $19 = 7 + 6r \Rightarrow r = 2$

aus Zeile 3 ergibt sich: $t = 4 + 2 \cdot 3 = 10$

Der Punkt S hat die Koordinaten S(4/19/10).

$$\text{Der Abstand von B(4/9/5) zu S beträgt: } |\overline{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{0 + 100 + 25} = \sqrt{125} \approx 11,18$$

4.5

Koordinaten von Punkt T:

Der gesuchte Punkt T habe die Koordinaten $T(a/b/c)$.

Wenn das Viereck PQRT ein Quadrat sein soll, muss gelten: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{TR}$

$$\text{Es ist } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{TR} = \begin{pmatrix} 10 - a \\ 23 - b \\ 2 - c \end{pmatrix}.$$

$$\text{Vergleich der beiden Vektoren liefert: } \begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 - a \\ 23 - b \\ 2 - c \end{pmatrix}$$

$$10 = 10 - a \Rightarrow a = 0$$

$$-2 = 23 - b \Rightarrow b = 25$$

$$0 = 2 - c \Rightarrow c = 2$$

Der gesuchte Punkt besitzt die Koordinaten $T(0/25/2)$.

Berechnung der Pyramidenhöhe:

Für das Pyramidenvolumen gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Der Flächeninhalt der Grundfläche beträgt $G = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |\overrightarrow{PQ}| = \sqrt{100 + 4} \cdot \sqrt{100 + 4} = 104$

Einsetzen in die Volumenformel: $416 = \frac{1}{3} \cdot 104 \cdot h \Rightarrow h = 12$

Mögliche Spitze der Pyramide:

Die Eckpunkte PQRT der Grundfläche besitzen alle die x_3 -Koordinate 2.

Die Grundfläche liegt somit parallel zur $x_1 - x_2$ -Ebene auf der Höhe $x_3 = 2$.

Damit die Pyramidenhöhe $h = 12$ ist, muss die Pyramidenspitze den x_3 -Wert $2 + 12 = 14$ besitzen.

Für die Pyramidenspitze gilt also $S^*(a/b/14)$ wobei a und b beliebige Zahlen sein können.

Beispiel: $S^*(0/0/14)$.