

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2015

Baden-Württemberg

Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Gegeben sind die folgenden Abbildungen mit Schaubildern zweier Funktionen:

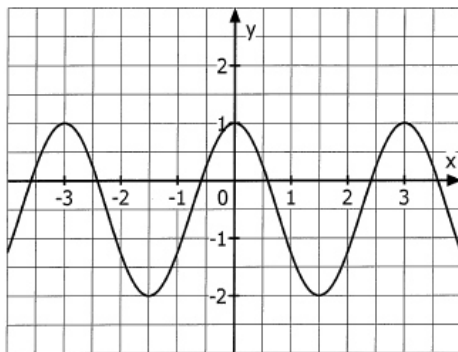


Abb. 1

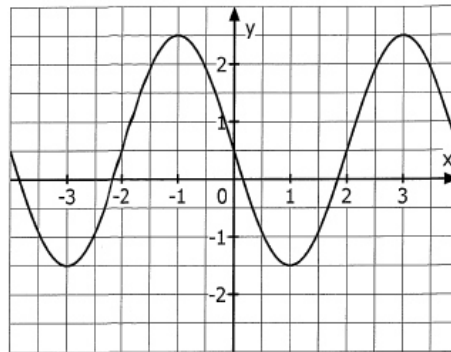


Abb. 2

3.1

Eine der beiden Abbildungen stellt das Schaubild mit der Gleichung $y = a \cos(kx) + b$ dar. Begründen Sie, welche das ist und bestimmen Sie a , b und k . (5 Punkte)

3.2

Untersuchen Sie für **jede** der beiden Abbildungen, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

- a) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = 0$ ist negativ.
- b) Der Funktionswert an der Stelle $x = -2$ ist positiv.
- c) Der Wert der ersten Ableitung an der Stelle $x = -3$ ist null.
- d) Der Wert der zweiten Ableitung an der Stelle $x = 3$ ist positiv. (8 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -1,5 \cos(2x) + 1$; $x \in [-1; 3]$. Ihr Schaubild ist K_f .

3.3

Zeichnen Sie K_f .

Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = 3x + 1 - \frac{3}{4}\pi$ eine Wendetangente an K_f ist.

Geben Sie die Koordinaten des dazugehörigen Wendepunktes an.

Bestimmen Sie die Gleichung der Normalen in diesem Punkt. (9 Punkte)

3.4

Geben Sie die exakten Koordinaten des Hochpunktes von K_f an.

Zeichnen Sie in das Koordinatensystem von 3.3 das Schaubild K_g der Funktion g mit

$g(x) = \frac{24}{\pi^3} x^3 - \frac{1}{2}$, $x \in \mathbb{R}$. Weisen Sie nach, dass sich K_f und K_g im Hochpunkt von K_f schneiden. Berechnen sie den exakten Inhalt der Fläche, die von K_f und K_g eingeschlossen wird.

(8 Punkte)

30 Punkte

Lösung

3.1

Die Funktionsgleichung beschreibt eine Kosinusfunktion, die nicht nach links oder rechts verschoben ist.

Das zugehörige Schaubild muss auf der y-Achse einen Hochpunkt oder Tiefpunkt besitzen. Daher kann nur Abbildung 1 zur Funktionsgleichung gehören.

$$\text{Es ist } b = \frac{y_{\text{HP}} + y_{\text{TP}}}{2} = \frac{1 + (-2)}{2} = -0,5 \quad \text{und} \quad a = \frac{y_{\text{HP}} - y_{\text{TP}}}{2} = \frac{1 - (-2)}{2} = 1,5$$

Die Periodenlänge beträgt $p = 3$ und daraus folgt $k = \frac{2\pi}{3}$.

3.2

Abbildung 1:

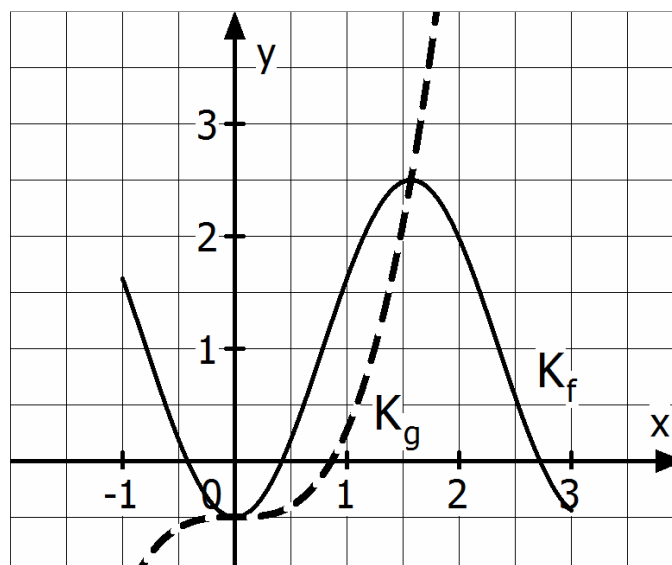
- a) Die Aussage ist falsch. An der Stelle $x = 0$ existiert ein Hochpunkt, daher ist der Wert der ersten Ableitung Null.
- b) Die Aussage ist falsch. An der Stelle $x = -2$ befindet sich das Schaubild unterhalb der x-Achse.
- c) Die Aussage ist richtig. An der Stelle $x = -3$ existiert ein Hochpunkt mit Steigung 0.
- d) Die Aussage ist falsch. An der Stelle $x = 3$ ist das Schaubild rechtsgekrümmt, daher ist die zweite Ableitung negativ.

Abbildung 2:

- a) Die Aussage ist richtig. An der Stelle $x = 0$ fällt die Kurve.
- b) Die Aussage ist richtig. An der Stelle $x = -2$ befindet sich das Schaubild oberhalb der x-Achse.
- c) Die Aussage ist richtig. An der Stelle $x = -3$ existiert ein Tiefpunkt mit Steigung 0.
- d) Die Aussage ist falsch. An der Stelle $x = 3$ ist das Schaubild rechtsgekrümmt, daher ist die zweite Ableitung negativ.

3.3

Zeichnung (auch zu 3.4)



Nachweis, dass die Gerade eine Wendetangente ist:

Die gegebene Gerade besitzt die Steigung $m = 3$.

Somit wird der Wendepunkt gesucht, der eine positive Steigung besitzt.

Die Periodenlänge des Schaubildes von f beträgt $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$.

Der Wendepunkt befindet sich auf der Höhe $y = 1$.

Der x -Wert des Wendepunktes mit positiver Steigung ist eine viertel Periode von $x = 0$ entfernt, also bei $x = \frac{\pi}{4}$.

Es gilt $W(\frac{\pi}{4} / 1)$.

Ableitungsfunktion: $f'(x) = 1,5 \sin(2x) \cdot 2 = 3 \sin(2x)$

Tangentengleichung in W : $y = f'(\frac{\pi}{4}) \cdot (x - \frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4})$

Mit $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ und $f'(\frac{\pi}{4}) = 3 \sin(\frac{\pi}{2}) = 3$ folgt für die Tangentengleichung:

$y = 3(x - \frac{\pi}{4}) + 1 = 3x - \frac{3}{4}\pi + 1$ und diese stimmt mit der gegebenen Geraden überein.

Gleichung der Normalen im Wendepunkt:

$$\begin{aligned} \text{Normalengleichung in } W: y &= -\frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} \cdot (x - \frac{\pi}{4}) + f(\frac{\pi}{4}) \Rightarrow y = -\frac{1}{3} (x - \frac{\pi}{4}) + 1 \\ &\Rightarrow y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{12}\pi + 1 \end{aligned}$$

3.4

Koordinaten des Hochpunktes:

Der Hochpunkt besitzt den y -Wert 2,5.

Der x -Wert des Hochpunktes ist eine halbe Periode von $x = 0$ entfernt, also bei $x = \frac{\pi}{2}$.

Es gilt $H(\frac{\pi}{2} / 2,5)$.

Nachweis, dass sich die Schaubilder im Hochpunkt schneiden:

Da der Hochpunkt auf dem Schaubild von f liegt muss der Nachweis geführt werden, dass der Hochpunkt H auch auf dem Schaubild von g liegt:

$$g(\frac{\pi}{2}) = \frac{24}{\pi^3} \cdot \left(\frac{\pi}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \frac{24}{\pi^3} \cdot \frac{\pi^3}{8} - \frac{1}{2} = 2,5$$

Flächeninhalt:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - g(x)) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-1,5 \cos(2x) + 1 - \left(\frac{24}{\pi^3} x^3 - \frac{1}{2} \right) \right) dx = \left[-\frac{1,5}{2} \sin(2x) + x - \frac{6}{\pi^3} x^4 + \frac{1}{2} x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$= -\frac{3}{4} \sin(\pi) + \frac{\pi}{2} - \frac{6}{\pi^3} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \right)^4 + \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{3}{4} \pi - \frac{6\pi^4}{16\pi^3} = \frac{3}{8} \pi$$