

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2015

Baden-Württemberg

Aufgabe 1 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4$ für $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f .

1.1

Zeichnen Sie K_f .

Untersuchen Sie K_f auf Symmetrie.

Geben Sie die Koordinaten der Extrem- und Wendepunkte von K_f an. (8 Punkte)

1.2

Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t an K_f im Punkt $P(1/f(1))$.

Die Tangente t , die y -Achse und K_f schließen im 1. Quadranten eine Fläche ein.

Zeichnen Sie in Ihr Koordinatensystem aus 1.1 die Tangente t , markieren Sie diese Fläche und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

(5 Punkte)

1.3

Gegeben sind für $0 \leq u \leq 2$ der Punkt $B(u/f(u))$ und der Punkt $D(-u/0)$.

Diese beiden Punkte sind Eckpunkte eines zur y -Achse symmetrischen Rechtecks $ABCD$.

Berechnen Sie den maximalen Umfang, den ein solches Rechteck haben kann.

(6 Punkte)

In einem Gehege wird der Kaninchenbestand über einen längeren Zeitraum beobachtet.

Die Auswertung dieser Beobachtung hat modellhaft folgende Bestandsfunktion ergeben:

$$k(t) = 1000 \cdot (1 - 0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot t}) ; t \geq 0.$$

Die Zeit t wird in Monaten gemessen und $k(t)$ gibt den Bestand der Kaninchen zum Zeitpunkt t an.

1.4

Wie groß ist der Kaninchenbestand im Gehege zu Beginn der Beobachtung ?

Wie wird im Funktionsterm berücksichtigt, dass der Bestand nicht beliebig groß wird ?

Nach welcher Zeit ist ein Kaninchenbestand von 250 erreicht ?

(5 Punkte)

1.5

Bestimmen sie die momentane Änderungsrate des Kaninchenbestandes in Abhängigkeit von der Zeit t .

Wann ist diese Änderungsrate am größten ?

Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate in den ersten 5 Monaten.

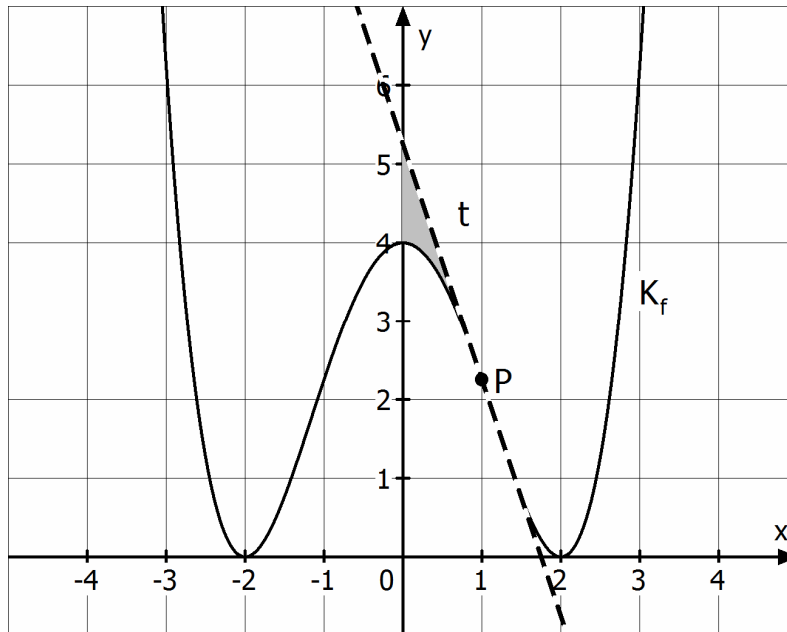
(6 Punkte)

(30 Punkte)

Lösung

1.1

Zeichnung des Schaubildes (einschließlich der Tangente aus Aufgabe 1.2)



Symmetrie:

1. Möglichkeit:

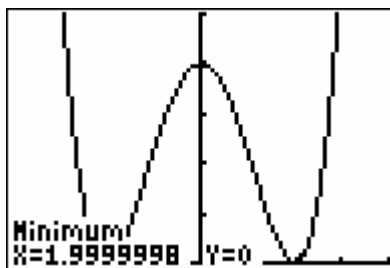
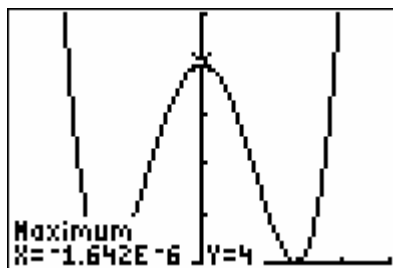
Im Funktionsterm kommen nur gerade Hochzahlen vor, daher ist K_f symmetrisch zur y-Achse.

2. Möglichkeit:

Es gilt $f(-x) = \frac{1}{4}(-x)^4 - 2(-x)^2 + 4 = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 4 = f(x)$, daher ist K_f symmetrisch zur y-Achse.

Extrempunkte:

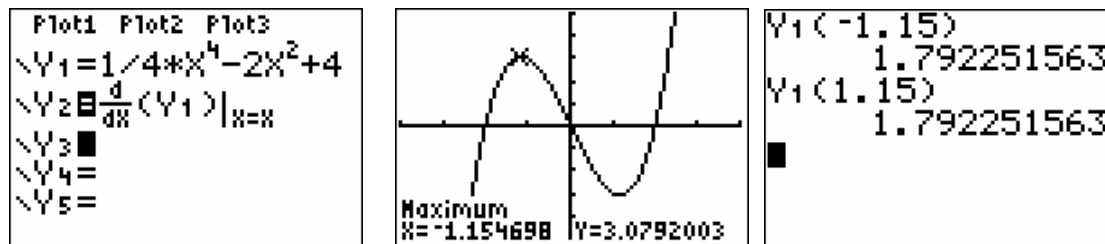
Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$



GTR: $H(0/4)$ und $T_1(-2/0)$ und $T_2(2/0)$

Wendepunkte:

Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$



GTR: Die Wendestellen sind die Extremstellen der Ableitungsfunktion.
 Die y-Werte der Wendepunkte erhält man durch Einsetzen der x-Werte in $f(x)$.
 $W_1(-1,15 / 1,79)$ und $W_2(1,15 / 1,79)$

1.2

Tangentengleichung im Punkt P

Es gilt $f'(x) = x^3 - 4x$

Allgemeine Tangentengleichung $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Mit der Berührstelle $u = 1$ folgt: $y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$

Es gilt $f'(1) = -3$ und $f(1) = 2,25$

Tangentengleichung t: $y = -3 \cdot (x - 1) + 2,25 \Rightarrow y = -3x + 5,25$

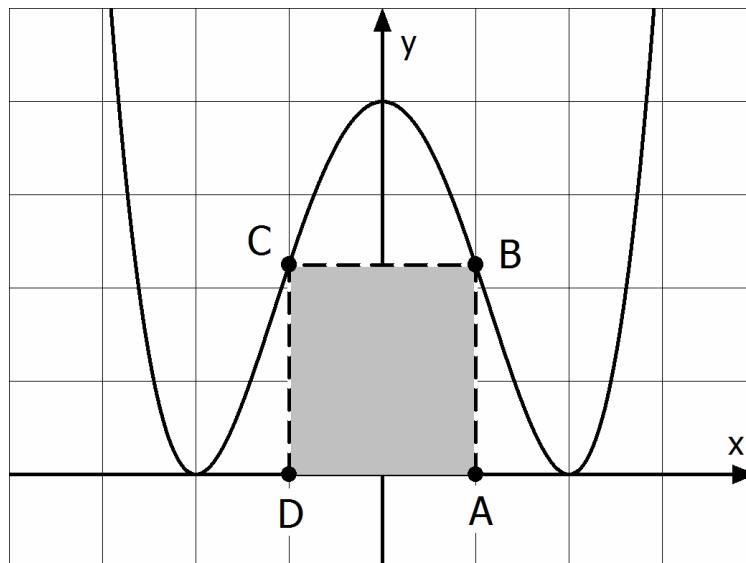
Zeichnung: siehe Aufgabe 1.1

Flächeninhalt:

$$A = \int_0^1 (-3x + 5,25 - f(x)) dx = \frac{11}{30} \quad (\text{GTR})$$

1.3

Skizze: (nicht verlangt, aber hilfreich)



Maximaler Umfang des Rechtecks:

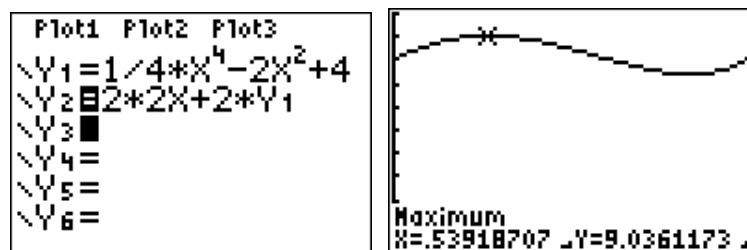
Formel für den Umfang des Rechtecks: $U = 2 \cdot \overline{AD} + 2 \cdot \overline{AB}$

Die Punkte haben folgende Koordinaten: $B(u / f(u))$, $A(u / 0)$ und $D(-u / 0)$

Für die Strecken gilt: $\overline{AD} = u - (-u) = 2u$ und $\overline{AB} = f(u) - 0 = f(u)$

Für die Zielfunktion gilt: $U(u) = 2 \cdot 2u + 2 \cdot f(u)$ mit $0 \leq u \leq 2$

Lokales Maximum von $U(u)$ mit dem GTR:



Das lokale Maximum existiert bei $u \approx 0,54$ mit $U(0,54) \approx 9,04$.

Für die Randwerte gilt: $U(0) = 8$ und $U(2) = 8$ die kleiner sind als das lokale Maximum.

Das globale Maximum existiert bei $u \approx 0,54$ mit $U(0,54) \approx 9,04$.

1.4

Kaninchenbestand zu Beginn der Beobachtung:

$$k(0) = 1000 \cdot (1 - 0,85 \cdot e^{-0,0513 \cdot 0}) = 150$$

Zu Beginn sind 150 Kaninchen vorhanden.

Begründung, dass der Bestand nicht beliebig groß wird:

Das Schaubild von $k(t)$ besitzt eine waagrechte Asymptote:

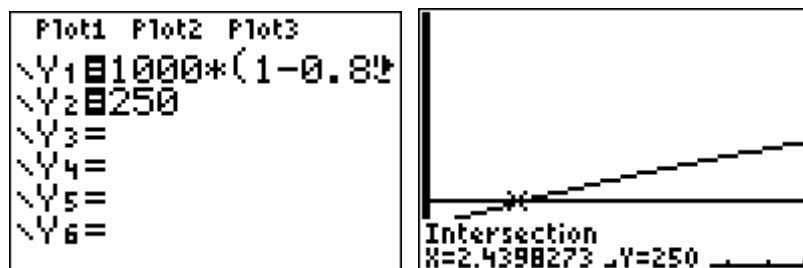
Für $t \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-0,0513 \cdot t} \rightarrow 0$ und damit strebt $k(t) \rightarrow 1000 \cdot (1 - 0,85 \cdot 0) = 1000$

Daher besitzt das Schaubild von $k(t)$ die waagrechte Asymptote $y = 1000$, so dass langfristig ein Bestand von 1000 Kaninchen nicht überschritten wird.

Folglich kann der Bestand nicht beliebig groß werden.

Zeitpunkt, bei dem ein Bestand von 250 erreicht wird:

Ansatz: $k(t) = 250$



Nach ca. 2,44 Monaten beträgt der Bestand 250.

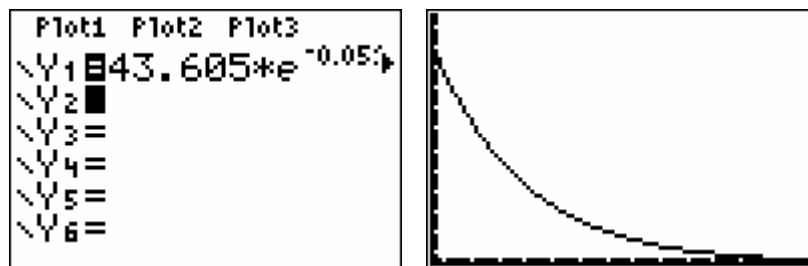
1.5

Momentane Änderungsrate:

Die momentane Änderungsrate zum Zeitpunkt t entspricht der Ableitungsfunktion $k'(t)$:

$$k'(t) = 1000 \cdot (-0,85) \cdot e^{-0,0513 \cdot t} \cdot (-0,0513) = 43,605 \cdot e^{-0,0513 \cdot t}$$

Maximum der Änderungsrate:



Das Schaubild der Ableitungsfunktion $k'(t)$ ist streng monoton fallend.

Daher befindet sich das Maximum der Änderungsrate am Anfang bei $t = 0$.

Durchschnittliche Änderungsrate:

Formel für die durchschnittliche / mittlere Änderungsrate im Intervall $[a;b]$: $\frac{k(b) - k(a)}{b - a}$

Durchschnittliche Änderungsrate in den ersten 5 Monaten:

$$\frac{k(5) - k(0)}{5 - 0} = \frac{342,31 - 150}{5} = 38,46$$

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=1000*(1-0.8^x)
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
    
```

```

Y1(5)
342.3082546
Y1(0)
150
    
```