

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2014

Baden-Württemberg

Aufgabe 7 Mathematik in der Praxis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Die Konrad Freudemann GmbH verkauft als alleinige Anbieterin einen multifunktionalen Rasenmäher. Dieser kann mit neuer, patentierter Technik nicht nur das Gras kurz halten, sondern auch die Straßen von Schmutz und Schnee befreien.

Die monatlichen Gesamtkosten des Unternehmens hängen von der Produktionsmenge x (in ME) ab und werden beschrieben durch die Funktion K mit

$$K(x) = \frac{3}{10000}x^3 - \frac{378}{625}x^2 + 440x + 4000 \quad (K \text{ in Geldeinheiten})$$

Die Preis-Absatz-Funktion ist gegeben durch $p(x) = 339,05 - 0,2x$.

7.1

Geben Sie den Funktionsterm für den monatlichen Gesamterlös in Abhängigkeit von der Produktionsmenge x an.

Zeichnen Sie die Schaubilder der Kosten- und Erlösfunktion für $0 \leq x \leq 1200$ in ein gemeinsames Koordinatensystem.

(4 Punkte)

7.2

Berechnen Sie, wie viele Rasenmäher die GmbH mindestens verkaufen muss, um einen Gewinn zu erzielen.

Ermitteln Sie den maximalen Gewinn des Unternehmens.

Veranschaulichen Sie beide Ergebnisse im Schaubild aus Aufgabe 7.1

Wie hoch ist der gewinnmaximale Preis in GE (Geldeinheiten) ?

(7 Punkte)

Das Patent der Konrad Freudemann GmbH ist ausgelaufen und das Unternehmen muss sich den Markt für multifunktionale Rasenmäher mit vielen Anbietern aus Osteuropa und Asien teilen.

7.3

Berechnen Sie den Marktpreis (Preis pro ME), wenn im Gewinnmaximum genau 1025 ME verkauft werden.

(3 Punkte)

7.4

Der Geschäftsführer meint: "Bei einem Marktpreis von 142 GE erreichen wir unseren maximalen Gewinn pro ME, wenn wir 1000 ME produzieren."

Überprüfen Sie diese Aussage auf ihren Wahrheitsgehalt.

(4 Punkte)

7.5

Berechnen Sie das Betriebsminimum. Geben Sie den Preis an, zu dem das Produkt mindestens verkauft werden muss, um die variablen Kosten zu decken.

(4 Punkte)

Die für die Rasenmäher benötigten Schrauben werden firmenintern auf einer alten und auf einer neuen Maschine hergestellt. Durch Stichprobenkontrollen ergeben sich für die Verteilung der Schraubendurchmesser folgende Daten:

	Mittelwert	Standardabweichung
Maschine A	10,0mm	0,05mm
Maschine B	10,0mm	0,065mm

Eine Schraube zählt als Ausschussware, wenn ihr Durchmesser um mehr als 1% vom Sollwert 10,0 mm abweicht. Sie wird dann entsorgt.

7.6

Es wird angenommen, dass die Verteilungen der Schraubendurchmesser normalverteilt sind. Berechnen Sie die Ausschussquoten der beiden Maschinen in Prozent.

(4 Punkte)

7.7

Auf einer dritten Maschine C werden 1000 Schrauben als Stichprobe entnommen.

Die Messwerte werden in einer Tabelle aufgenommen.

Vergleichen Sie diese Maschine mit den Maschinen A und B.

Ist es sinnvoll, die Produktion auf Maschine C weiter zu betreiben ?

Durchmesser in mm	9,5- 9,6	9,6- 9,7	9,7- 9,8	9,8- 9,9	9,9- 10,0	10,0- 10,1	10,1- 10,2	10,2- 10,3	10,3- 10,4	10,4- 10,5
Anzahl	1	2	40	67	338	379	133	35	3	2

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung

7.1

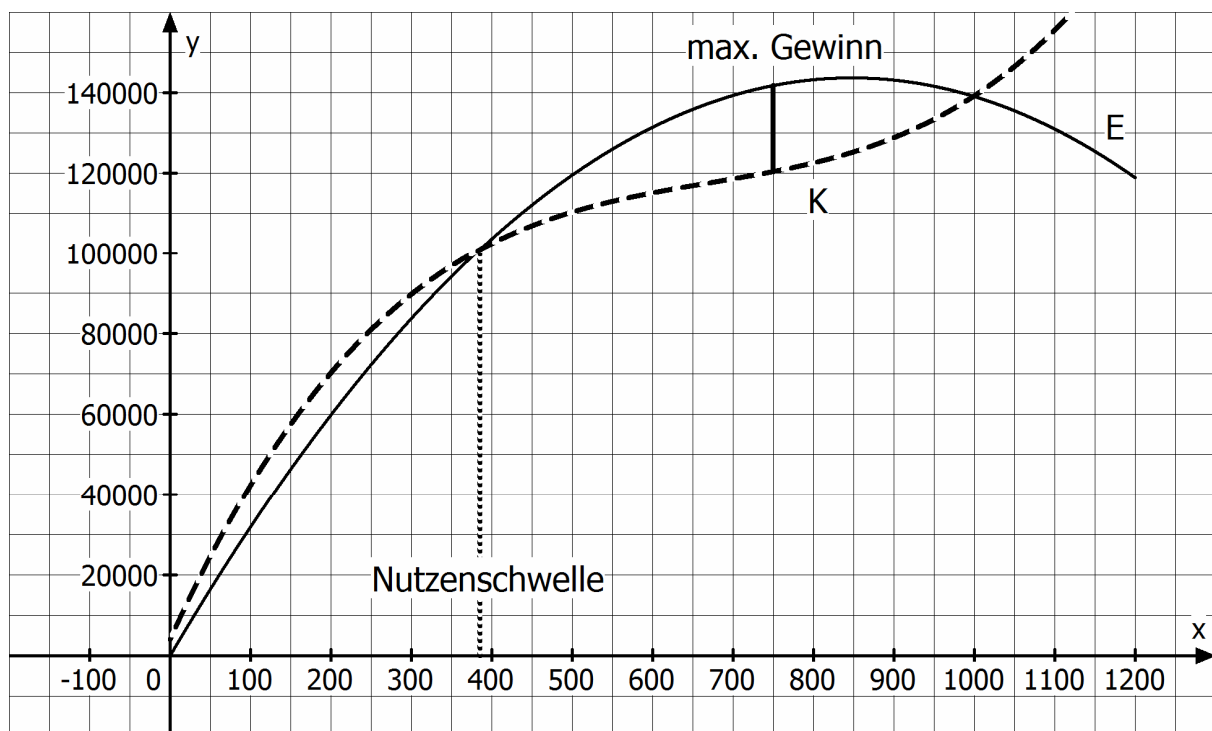
Funktionsterm Gesamterlös

Gesamterlös = "Preis mal Menge"

$$E(x) = x \cdot p(x) = x \cdot (339,05 - 0,2x) = -0,2x^2 + 339,05x$$

Zeichnung

Hier sind auch die Ergebnisse aus Aufgabe 7.2 enthalten.



7.2

Anzahl verkaufter Rasenmäher

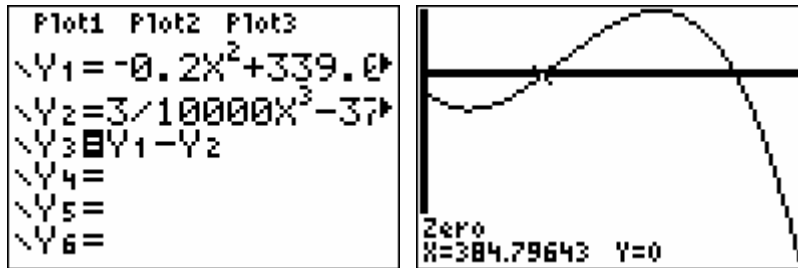
Man benötigt zunächst die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$.

Bei Gewinnerzielung gilt $G(x) > 0$.

Gewinnfunktion

$$G(x) = E(x) - K(x) = -0,2x^2 + 339,05x - \left(\frac{3}{10000}x^3 - \frac{378}{625}x^2 + 440x + 4000 \right)$$

Bedingung für Gewinnerzielung: $G(x) > 0$

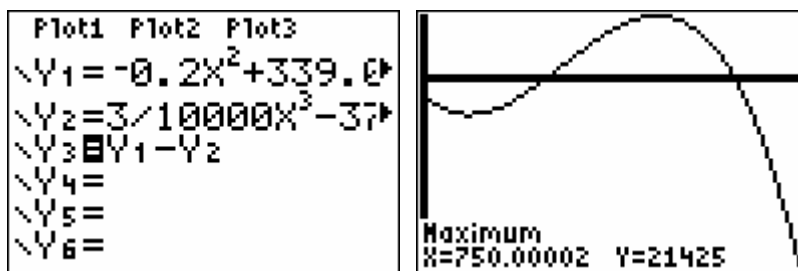


Die Gewinnfunktion besitzt die Nullstelle $x \approx 384,8$.

Die GmbH muss mindestens 385 Rasenmäher verkaufen (die "Nutzenschwelle"), um einen Gewinn zu erzielen.

Maximaler Gewinn

Bedingung: $G'(x) = 0$ und $G''(x) < 0$



Gewinnmaximale Menge: $x = 750$ Rasenmäher

Maximaler Gewinn: $G(750) = 21425$ GE

Die Veranschaulichung ist in der Zeichnung bei 7.1 bereits enthalten.

Der gewinnmaximale Preis beträgt $p(750) = 339,05 - 0,2 \cdot 750 = 189,05$ GE.

7.3

Berechnung Marktpreis

Aufgrund der Vorgabe, dass die GmbH nun kein Monopol mehr ist, existiert ein konstanter Preis p (unabhängig von der konkreten Absatzmenge x).

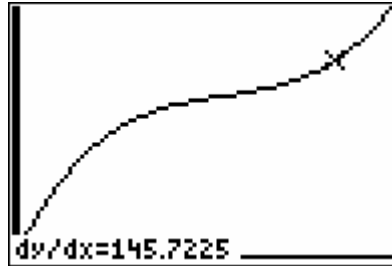
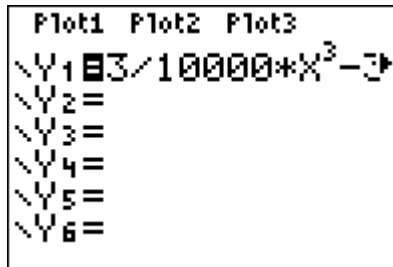
Die Erlösfunktion lautet daher $E(x) = p \cdot x$

Durch den Wegfall des Monopols gilt $G(x) = p \cdot x - K(x)$

Im Gewinnmaximum gilt $G'(x) = p - K'(x) = 0$

Gewinnmaximale Menge bei $x = 1025$:

$$G'(1025) = p - K'(1025) = 0 \Rightarrow p = K'(1025) \approx 145,72 \text{ GE}$$



7.4

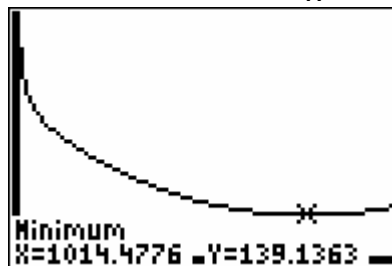
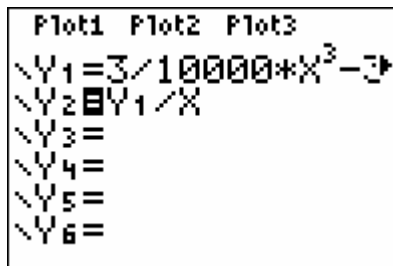
Maximaler Gewinn pro ME

Wie in 7.3 lautet hier die Gewinnfunktion $G(x) = p \cdot x - K(x)$

Der Gewinn pro ME entspricht der Funktion $\frac{G(x)}{x} = p - \frac{K(x)}{x}$

Der Gewinn pro ME wird maximal, wenn die Stückkosten $\frac{K(x)}{x}$ minimal werden

Berechnung des Minimums der Stückkostenfunktion $\frac{K(x)}{x}$



GTR: Die Stückkostenfunktion wird minimal für $x \approx 1014$ ME.

Die Aussage ist daher falsch - und zwar unabhängig davon, wie hoch der konkrete Preis p ist.

7.5

Betriebsminimum und Preisberechnung

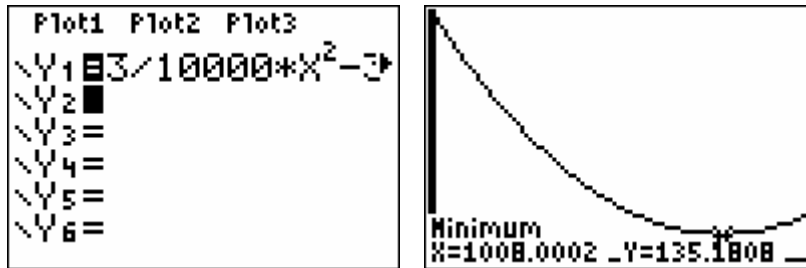
Das Betriebsminimum entspricht dem Minimum der variablen Stückkostenfunktion

$$k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x}$$

$$\text{Es gilt } K_v(x) = \frac{3}{10000}x^3 - \frac{378}{625}x^2 + 440x \text{ und}$$

$$\text{Variable Stückkosten: } k_v(x) = \frac{3}{10000}x^2 - \frac{378}{625}x + 440$$

Minimum der variablen Stückkosten mit dem GTR:



Das Betriebsminimum entspricht $x = 1008$ ME.

Der Mindestpreis entspricht der kurzfristigen Preisuntergrenze und diese ist der Wert der variablen Stückkosten in ihrem Betriebsminimum: $k_v(1008) = 135,1808$ GE

Das Produkt muss mindestens für 135,19 GE verkauft werden.

7.6

Ausschussquoten in Prozent

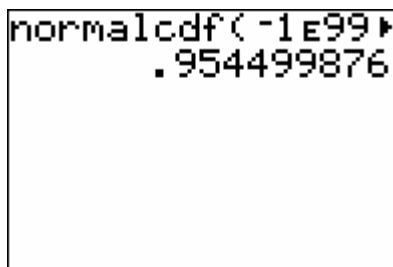
Maschine A:

Die Zufallsvariable X sei der Durchmesser der Schrauben.

X ist normalverteilt mit $\mu = 10$ und $\sigma = 0,05$

1% von 10,0 mm sind 0,1 mm.

$P(9,9 \leq X \leq 10,1) = P(X \leq 10,1) - P(X \leq 9,9)$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit Maschine A keinen Ausschuss produziert.



$P(\text{Maschine A produziert keinen Ausschuss}) = 0,9545$

$P(\text{Maschine A produziert Ausschuss}) = 1 - 0,9545 = 0,0455 = 4,55\%$

Analoges Vorgehen bei Maschine B (nur mit anderem σ)

Maschine B:

Die Zufallsvariable X sei der Durchmesser der Schrauben.

X ist normalverteilt mit $\mu = 10$ und $\sigma = 0,065$

1% von 10,0 mm sind 0,1 mm.

$P(9,9 \leq X \leq 10,1) = P(X \leq 10,1) - P(X \leq 9,9)$ gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit Maschine B keinen Ausschuss produziert.

```
normalcdf(-1E99▶
.8760641618
```

$P(\text{Maschine B produziert keinen Ausschuss}) = 0,876$

$P(\text{Maschine A produziert Ausschuss}) = 1 - 0,876 = 0,124 = 12,4\%$

7.7

Prüfung Maschine C

Anhand der Daten bestimmt man mit dem GTR den Mittelwert und die Standardabweichung der Stichprobe und prüft dann wie in 7.6 die Ausschussquote.

L1	L2	L3	1
9.65	1	-----	
9.65	2		
9.75	40		
9.85	67		
9.95	338		
10.05	379		
10.15	133		
L10=9.55			

```
mean(L1,L2)
10.0115
```

```
mean(L1,L2)
10.0115
stdDev(L1,L2)
.1099082792
```

Der Mittelwert ist 10,01 mm und die Standardabweichung 0,11 mm.

Nun zeichnet man wie in Teilaufgabe 7.6 die Gaußkurve mit $\mu = 10,01$ und $\sigma = 0,11$ und berechnet die Fläche zwischen 9,9 und 10,1.

Es gilt: $P(\text{Maschine C produziert keinen Ausschuss}) = 0,6347$.

$P(\text{Maschine C produziert Ausschuss}) = 1 - 0,6347 = 0,3653$

Aufgrund des hohen Ausschusses ist es nicht sinnvoll Maschine C einzusetzen.