

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2014

Baden-Württemberg

Aufgabe 6 Stochastik

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2014

Ein Glücksrad besteht aus zehn gleich großen Sektoren. Ein Sektor ist rot, zwei sind grün und die restlichen Sektoren sind weiß. Ein fester Pfeil zeigt das Ergebnis nach einer Drehung des Glücksrades an.

Das Glücksrad wird für ein Spiel zwei Mal gedreht. Nachdem das Glücksrad das erste Mal gedreht wurde, gilt folgende Ersetzungsregel: Zeigt es rot, wird ein weißer Sektor durch einen roten ersetzt, zeigt es grün, wird ein weißer Sektor durch einen grünen ersetzt.

Dann wird das Glücksrad das zweite Mal gedreht.

Nach jedem Spiel wird das Glücksrad in dem ursprünglichen Zustand zurückgesetzt.

6.1

Zeichnen Sie ein geeignetes Baumdiagramm, das die Wahrscheinlichkeiten für alle Spielausgänge beschreibt.

(6 Punkte)

6.2

Begründen Sie: Ist es wahrscheinlicher, dass das Glücksrad während eines beliebigen Spieles verändert wird oder dass es während eines Spieles gleich bleibt ?

(2 Punkte)

6.3

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für folgende Ereignisse:

A: Das Glücksrad zeigt mindestens einmal weiß.

B: Es wird zwei Mal die gleiche Farbe gezeigt.

C: Es wird rot oder grün gezeigt.

D: Die beiden gezeigten Farben unterscheiden sich.

(8 Punkte)

Das Glücksrad samt oben stehenden Regeln wird nun für ein Gewinnspiel genutzt: Der Einsatz pro Spiel beträgt 2 Euro. Zeigt das Glücksrad (rot, rot) erhält der Spieler 30 Euro, bei (rot, grün) oder (grün, rot) erhält er 12,50 Euro, bei (grün, grün) erhält er 5 Euro. In allen anderen Fällen erhält der Spieler nichts.

6.4

Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt ein Spieler einen Gewinn ?

(3 Punkte)

6.5

Wie hoch ist auf lange Sicht der Gewinn bzw. Verlust des Veranstalters pro Spiel ?

(4 Punkte)

6.6

Um wie viel Euro müsste man den Auszahlungsbetrag für (grün, grün) ändern, damit das Spiel fair wird ?

(4 Punkte)

6.7

Schlagen Sie eine Veränderung der oben beschriebenen Ersetzungsregel der Sektoren vor, die für den Spieler vorteilhaft wäre, und begründen Sie Ihren Vorschlag.

Wäre es für den Veranstalter günstiger, wenn er auf die Ersetzungen der Sektoren, wie sie oben beschrieben ist, verzichten würde ?

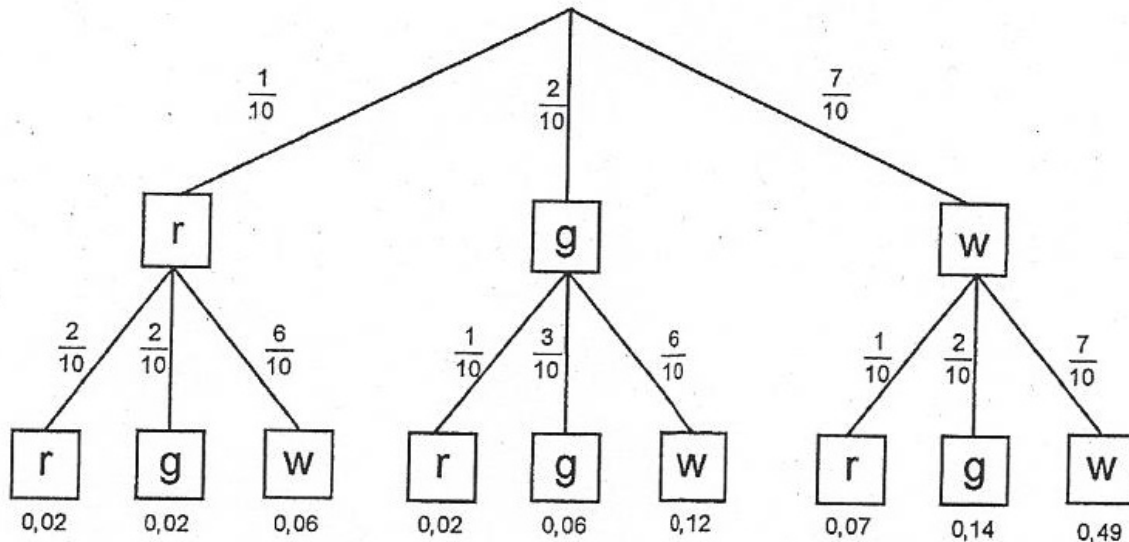
(3 Punkte)

30 Punkte

Lösung

6.1

Zeichnung Baumdiagramm



Die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Spielausgänge ergeben sich durch Multiplikation der einzelnen Pfadwahrscheinlichkeiten.

Beispiel: $P(wg) = \frac{7}{10} \cdot \frac{2}{10} = 0,14$

6.2

Begründung

Das Glücksrad ändert sich nur dann, wenn rot oder grün gedreht wird.

$$P(\text{Rad ändert sich}) = P(\text{rot oder grün wird gedreht}) = \frac{3}{10} = 0,3$$

$$P(\text{Rad ändert sich nicht}) = P(\text{weiß wird gedreht}) = \frac{7}{10} = 0,7$$

Es ist wahrscheinlicher, dass das Glücksrad gleich bleibt.

6.3

Wahrscheinlichkeit der einzelnen Ereignisse

$$\begin{aligned} P(A) &= P(rw) + P(gw) + P(wr) + P(wg) + P(ww) = 0,06 + 0,12 + \frac{7}{10} = 0,88 \\ &= \underbrace{P(rw) + P(gw) + P(wr) + P(wg)}_{= P(w, \text{egal})} + P(ww) = \frac{7}{10} + 0,14 = 0,88 \end{aligned}$$

$$P(B) = P(rr) + P(gg) + P(ww) = 0,02 + 0,06 + 0,49 = 0,57$$

$$P(C) = 1 - P(ww) = 1 - 0,49 = 0,51$$

Das Gegenereignis von "rot oder grün" ist, dass nur weiß gedreht wird.

$$P(D) = 1 - P(B) = 1 - 0,57 = 0,43$$

Das Ereignis B ist das Gegenereignis von D.

6.4

Wahrscheinlichkeit für einen Gewinn

$$P(\text{Gewinn Spieler}) = P(rr) + P(rg) + P(gr) + P(gg) = 0,02 + 0,02 + 0,02 + 0,06 = 0,12$$

6.5

Erwarteter Gewinn / Verlust des Veranstalters

Ergebnis	rr	rg oder gr	gg	sonst
Auszahlung	30 €	12,50 €	5 €	0 €
Wahrscheinlichkeit	0,02	$0,02 + 0,02 = 0,04$	0,06	0,88

$$\text{Erwartete Auszahlung} = 30€ \cdot 0,02 + 12,50€ \cdot 0,04 + 5€ \cdot 0,06 = 1,40€$$

Aufgrund des Einsatzes von 2 Euro gewinnt der Veranstalter pro Spiel im Durchschnitt 0,60 Euro auf lange Sicht.

6.6

Änderung der Auszahlung, damit das Spiel fair wird

Die Auszahlung für gg sei x €.

Ergebnis	rr	rg oder gr	gg	sonst
Auszahlung	30 €	12,50 €	x €	0 €
Wahrscheinlichkeit	0,02	$0,02 + 0,02 = 0,04$	0,06	0,88

$$\text{Erwartete Auszahlung} = 30€ \cdot 0,02 + 12,50€ \cdot 0,04 + x€ \cdot 0,06 = 1,1 + 0,06x$$

$$\text{Bedingung: } 1,1 + 0,06x = 2 \Rightarrow 0,06x = 0,9 \Rightarrow x = 15 \text{ €}$$

Der neue Auszahlungsbetrag für gg müsste 15 € sein.

Das heißt, der Auszahlungsbetrag für gg müsste um 10 € erhöht werden.

6.7**Vorschlag zur Änderung der Ersetzungsregel**

Würde bei Drehung des grünen Sektors ein weißer Sektor durch einen roten Sektor ersetzt anstatt durch einen grünen, wäre dies für den Spieler aufgrund der höheren Auszahlung bei rot vorteilhafter (bei "gg" erhält man 5 €, bei "gr" 12,50 €)

Für den Veranstalter wäre es günstiger, wenn es die beschriebenen Ersetzungsregeln nicht gäbe und auf die Ersetzung verzichtet würde.

Begründung: Bei der Ersetzung fällt ein für den Veranstalter günstiges weißes Feld (ohne Auszahlung) weg und wird durch ein rotes oder grünes Feld ersetzt.