

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2014

Baden-Württemberg

Aufgabe 5 Wirtschaftliche Anwendungen

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Januar 2015

Ein Unternehmen stellt aus drei pflanzlichen Rohstoffen R_1 , R_2 und R_3 die Substanzen S_1 , S_2 und S_3 her. Aus diesen Substanzen werden die Medikamente M_1 und M_2 hergestellt.

Die folgenden Tabellen zeigen den Materialbedarf in Mengeneinheiten (ME):

	S_1	S_2	S_3
R_1	1	2	2
R_2	4	3	2
R_3	1	5	1

	M_1	M_2
S_1	1	5
S_2	1	3
S_3	2	2

5.1

Erstellen Sie eine Tabelle, die den Rohstoffbedarf für die Medikamente darstellt.

(3 Punkte)

5.2

Erfahrungsgemäß werden im Sommer 2000 ME des Medikaments M_1 und 1700 ME des Medikaments M_2 verkauft.

Berechnen Sie den Bedarf an Substanzen, die dazu benötigt werden.

(3 Punkte)

5.3

Im Lager befinden sich 660 ME R_1 und 1140 ME R_2 . Der Rohstoff R_3 ist nicht mehr vorrätig. Es werden gleich viele ME der Substanz S_1 und S_3 benötigt.

Wie viele ME der Substanzen S_1 , S_2 und S_3 können aus den Lagerbeständen hergestellt werden, wenn alle vorhandenen Rohstoffe verbraucht werden sollen ?

Wie viele ME des Rohstoffs R_3 müssen dazu bestellt werden ?

(6 Punkte)

Die Zweigwerke A, B und C eines Unternehmens sind untereinander und mit dem Markt nach dem Leontief-Modell verflochten.

Für die Technologiematrix A gilt: $(E - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{16}{3} & 3 \\ 2 & \frac{28}{3} & 4 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix}$

5.4

Wie viele ME müssen in den einzelnen Zweigwerken produziert werden, wenn A 6000 ME, B 9000 ME und C 20000 ME an den Markt abgeben ?

(3 Punkte)

5.5

Berechnen Sie die Technologiematrix A.

(4 Punkte)

5.6

Gegeben sind die Matrizen $C = \begin{pmatrix} a & \frac{3}{10} \\ b & \frac{7}{8} \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{3}{5} \\ -2b & 17 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie a und b so, dass gilt: $C + D = C \cdot D$

(7 Punkte)

5.7

Berichtigen Sie folgende Aussagen.

- a) Ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen kann einen eindeutigen Lösungsvektor besitzen.
- b) Lineare Gleichungssysteme besitzen entweder einen oder unendlich viele Lösungsvektoren.
- c) Das Matrizenprodukt $A \cdot B$ kann nur gebildet werden, wenn die Anzahl der Spalten der Matrix A mit der Anzahl der Spalten der Matrix B übereinstimmt.
- d) Gegeben sind die Matrizen A und B.
Eine Matrix X, die die Gleichung $A \cdot X = B$ löst, erhält man, indem man durch die Matrix A dividiert.

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung

5.1

Tabelle des Rohstoffbedarfs für die Medikamente

$$\text{Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 15 \\ 11 & 33 \\ 8 & 22 \end{pmatrix}$$

MATRIX[A] 3 x3 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ 3, 3=1	MATRIX[B] 3 x2 $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ 3, 2=2	[A]*[B] $\begin{bmatrix} 7 & 15 \\ 11 & 33 \\ 8 & 22 \end{bmatrix}$
---	---	---

zugehörige Tabelle:

	M_1	M_2
R_1	7	15
R_2	11	33
R_3	8	22

5.2

Bedarf der Substanzen

Aus den gegebenen Mengen der Medikamente ergibt sich $\vec{p} = \begin{pmatrix} 2000 \\ 1700 \end{pmatrix}$

$$\vec{z} = B \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 1700 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10500 \\ 7100 \\ 7400 \end{pmatrix}$$

MATRIX[D] 2 x1 [2000] [1700] z, 1=1700	[B]*[D] [10500] [7100] [7400]
--	---

Es müssen 10500 ME von S_1 und 7100 ME von S_2 und 7400 ME von S_3 vorrätig sein.

5.3

Berechnung der Substanz- und Rohstoffmenge

$$\text{Rohstoffvektor } \vec{r} = \begin{pmatrix} 660 \\ 1140 \\ r_3 \end{pmatrix} ; \text{ Zwischenproduktvektor } \vec{z} = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{z} = \vec{r} : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 660 \\ 1140 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

$$s_1 + 2s_2 + 2s_3 = 660$$

$$\text{Ausmultiplizieren der Gleichung: } 4s_1 + 3s_2 + 2s_3 = 1140$$

$$s_1 + 5s_2 + s_3 = r_3$$

$$3s_1 + 2s_2 = 660$$

$$\text{Umformung für die GTR-Eingabe: } 6s_1 + 3s_2 = 1140$$

$$2s_1 + 5s_2 - r_3 = 0$$

MATRIX[A] 3 x4 [3 2 0] [6 3 2] [2 5 1] z, 3=-1	rref([A]) [1 0 0 100] [0 1 0 180] [0 0 1 1100]
---	--

GTR: $s_1 = 100$; $s_2 = 180$; $r_3 = 1100$

Von S_1 und S_3 benötigt man jeweils 100 ME, von S_2 benötigt man 180 ME.

Von Rohstoff R_3 müssen 1100 ME bestellt werden.

5.4

Produktionsmenge

Leontief-Gleichung: $\vec{x} = (E - A)^{-1} \cdot \vec{y}$ mit $\vec{y} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 20000 \end{pmatrix}$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 & \frac{16}{3} & 3 \\ 2 & \frac{28}{3} & 4 \\ 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 20000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 132000 \\ 176000 \\ 292000 \end{pmatrix}$$

MATRIX[F] 3 x 3	MATRIX[G] 3 x 1	[F]*[G]
$\begin{bmatrix} 4 & 5.3333 & 3 \\ 2 & 9.3333 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 6000 \\ 9000 \\ 20000 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 132000 \\ 176000 \\ 292000 \end{bmatrix}$
3, 3=8	3, 1=20000	

Zweigwerk A muss 132000 ME, Zweigwerk B 176000 ME und Zweigwerk C 292000 ME produzieren.

5.5

Technologiematrix A

Es gilt $((E - A)^{-1})^{-1} = E - A$ und $E - (E - A) = A$ wobei E die Einheitsmatrix ist.

Aus der gegebenen Matrix $(E - A)^{-1}$ wird die Inverse mit dem GTR bestimmt:

MATRIX[F] 3 x 3	[F] ⁻¹
$\begin{bmatrix} 4 & 5.3333 & 3 \\ 2 & 9.3333 & 4 \\ 4 & 12 & 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 & -0.1 \\ 0 & 0.3 & -0.15 \\ -0.2 & -0.4 & 0.4 \end{bmatrix}$
3, 3=8	

Es gilt $E - A = ((E - A)^{-1})^{-1} = \begin{pmatrix} 0,4 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & 0,3 & -0,15 \\ -0,2 & -0,4 & 0,4 \end{pmatrix}$

$$A = E - (E - A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0,4 & -0,1 & -0,1 \\ 0 & 0,3 & -0,15 \\ -0,2 & -0,4 & 0,4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,1 & 0,1 \\ 0 & 0,7 & 0,15 \\ 0,2 & 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

5.6

Berechnung von a und b

$$C+D = \begin{pmatrix} a + \frac{3}{4} & \frac{3}{10} - \frac{3}{5} \\ b - 2b & \frac{7}{8} + 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{3}{4} & -\frac{3}{10} \\ -b & \frac{143}{8} \end{pmatrix}$$

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a - \frac{3}{5}b & -\frac{3}{5}a + \frac{51}{10} \\ \frac{3}{4}b - \frac{7}{4}b & -\frac{3}{5}b + \frac{119}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a - \frac{3}{5}b & -\frac{3}{5}a + \frac{51}{10} \\ -b & -\frac{3}{5}b + \frac{119}{8} \end{pmatrix}$$

Vergleich der Einträge:

$$\text{rechts oben: } -\frac{3}{10} = -\frac{3}{5}a + \frac{51}{10} \Rightarrow -\frac{3}{5}a = -\frac{54}{10} \Rightarrow a = 9$$

$$\text{rechts unten: } \frac{143}{8} = -\frac{3}{5}b + \frac{119}{8} \Rightarrow -\frac{3}{5}b = 3 \Rightarrow b = -5$$

links unten: $-b = -b$ ist wahr

$$\text{links oben: } a + \frac{3}{4} = \frac{3}{4}a - \frac{3}{5}b \stackrel{a=9, b=-5}{\Rightarrow} 9 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \cdot 9 - \frac{3}{5} \cdot (-5) \text{ ist wahr}$$

Es ist $a = 9$ und $b = -5$.

5.7

Berichtigung der Aussagen:

- Ein lineares Gleichungssystem mit drei Unbekannten und zwei Gleichungen kann **niemals** einen eindeutigen Lösungsvektor besitzen.
- Lineare Gleichungssysteme besitzen entweder einen **oder keinen** oder unendlich viele Lösungsvektoren.
- Das Matrixprodukt $A \cdot B$ kann nur gebildet werden, wenn die Anzahl der Spalten der Matrix A mit der Anzahl der **Zeilen** der Matrix B übereinstimmt.
- Gegeben sind die Matrizen A und B.
Eine Matrix X, die die Gleichung $A \cdot X = B$ löst, erhält man, indem man die Gleichung **auf beiden Seiten von links mit A^{-1} multipliziert**.