

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2014

Baden-Württemberg

Aufgabe 4 Analytische Geometrie

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2014

Gegeben sind die Punkte A(-1/3/1), B(-8/3/1), C(-11/3/4,5) und D(-4/3/4,5).

4.1

Zeichnen Sie das Viereck ABCD in ein räumliches Koordinatensystem (x_2 - und x_3 -Achse:

1 LE = 1cm; x_1 -Achse: mit dem Schrägwinkel 45° und $1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$).

(4 Punkte)

Welche besondere Lage im Koordinatensystem hat dieses Viereck ?

(2 Punkte)

4.2

Zeigen Sie rechnerisch, dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist, aber kein Rechteck.
(6 Punkte)

4.3

Bestimmen Sie den Innenwinkel α am Eckpunkt A des Parallelogramms.
Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms ABCD.

(6 Punkte)

Gegeben sind zwei weitere Punkte E(-1/-1,5/1) und H(-4/-1,5/4,5).

4.4

Zeichnen Sie die Punkte E und H in ihr Koordinatensystem aus 4.1 ein und ergänzen Sie Ihre Zeichnung zu einem schiefen Quader.

Bestimmen Sie die Koordinaten der fehlenden Eckpunkte F und G.

(4 Punkte)

Gegeben ist die Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}$

4.5

Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g mit der $x_1 - x_2$ -Ebene.

(2 Punkte)

4.6

Bestimmen Sie eine Gleichung der Geraden h durch die Punkte A und H.
Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden g und h.

(6 Punkte)

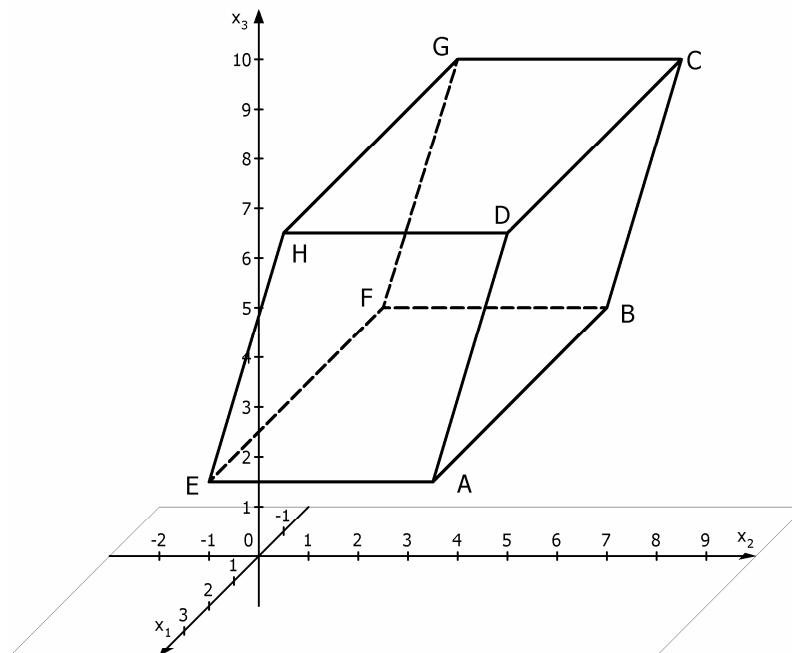
30 Punkte

Lösung

4.1

Zeichnung

In der Zeichnung ist neben dem Viereck ABCD bereits die Ergänzung aus Teilaufgabe 4.4 enthalten.



Besondere Lage des Vierecks:

Alle Punkte haben die x_2 -Koordinate 3.

Daher liegen alle Punkte in einer zur $x_1 - x_3$ -Ebene parallelen Ebene, die gegenüber der $x_1 - x_3$ -Ebene um drei Einheiten nach rechts verschoben ist.

4.2

Nachweis Parallelogramm, aber kein Rechteck

$$\text{Es ist } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -8 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} -11 \\ 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 4,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ und es handelt sich somit um ein Parallelogramm.

Kontrolle, ob im Punkt A ein rechter Winkel existiert:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} = -7 \cdot (-3) + 0 + 0 \cdot 3,5 = 21 \neq 0$$

Da das Ergebnis des Skalarproduktes nicht Null ist, handelt es sich um keinen rechten Winkel. Damit ist das Viereck ABCD kein Rechteck.

4.3

Innenwinkel am Eckpunkt A

Für den Innenwinkel gilt die Formel: $\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$

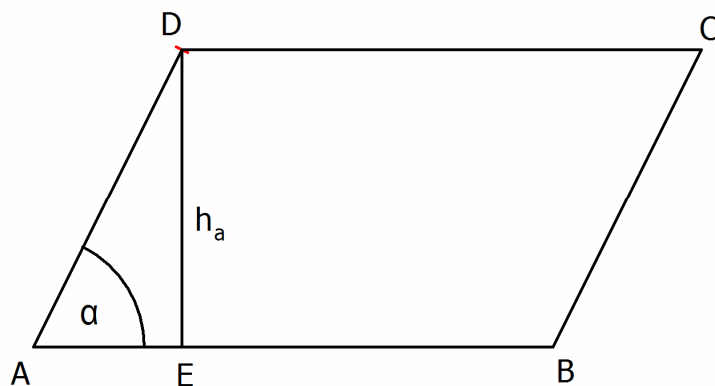
Aus Teilaufgabe 4.2 ergibt sich $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 21$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-7)^2 + 0^2 + 0^2} = 7 \text{ und } |\overrightarrow{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 3,5^2} = \sqrt{21,25}$$

$$\cos \alpha = \frac{21}{7 \cdot \sqrt{21,25}} \approx 0,651 \Rightarrow \alpha \approx 49,4^\circ$$

Flächeninhalt des Parallelogramms

Die Flächeninhaltsformel lautet $A = \overline{AB} \cdot h_a$ wobei die Höhe des Parallelogramms mit Hilfe des berechneten Innenwinkels bestimmt werden kann



$$\text{Im Dreieck AED gilt: } \sin \alpha = \frac{h_a}{\overline{AD}} \Rightarrow h_a = \overline{AD} \cdot \sin \alpha = \sqrt{21,25} \cdot \sin 49,4^\circ = 3,5$$

$$\text{Flächeninhalt des Parallelogramms: } A = \overline{AB} \cdot h_a = 7 \cdot 3,5 = 24,5$$

4.4

Ergänzung der Zeichnung

Die Ergänzung wurde bereits in der Zeichnung aus 4.1 vorgenommen

Koordinaten der Eckpunkte F und G

Die Koordinaten der Punkte erhält man durch die Berechnung der zugehörigen Ortsvektoren $\overrightarrow{OF}$ bzw. $\overrightarrow{OG}$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1,5 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und damit } F(-8/-1,5/1)$$

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ -1,5 \\ 4,5 \end{pmatrix} \text{ und damit } G(-11/-1,5/4,5)$$

4.5

Schnittpunkt

Für die Gerade gilt: $x_3 = 6 - r$

Gesucht ist der Punkt, für den gilt: $x_3 = 0 \Rightarrow 6 - r = 0 \Rightarrow r = 6$

$$\text{Einsetzen von } r = 6 \text{ in die Geradengleichung: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ 18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Schnittpunkt hat die Koordinaten $S_{12}(33/18/0)$

4.6

Gleichung der Geraden h

$$h: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AH} \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} \text{ mit } s \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt der Geraden g und h

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{Umformung in ein LGS:}$$

$$\begin{array}{rcl} -3s & -5r & = 4 \\ -4,5s & -3r & = -3 \\ 3,5s & +r & = 5 \end{array}$$

Lösung der ersten beiden Gleichungen mit dem GTR:

MATRIX[A] 2 x3 [-3,5 -5 4] [-4,5 -3 -3] 2, 3 = -3	rref([A]) [1 0 2] [0 1 -2]
--	---

Aus der 1.GTR-Zeile folgt $s = 2$ und aus der 2.GTR-Zeile $r = -2$.

Kontrolle, ob die dritte Zeile stimmt:

Einsetzen von $s = 2$ und $r = -2$ in die dritte Zeile: $3,5 \cdot 2 + (-2) = 5$ ist wahr

Damit ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und es existiert ein Schnittpunkt.

Einsetzen von $s = 2$ in die Gerade h ergibt $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -4,5 \\ 3,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt hat die Koordinaten $S(-7/-6/8)$.