

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2014

Baden-Württemberg

Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

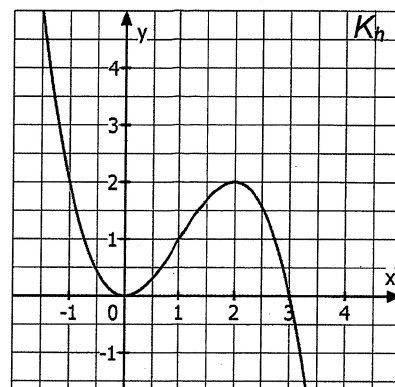
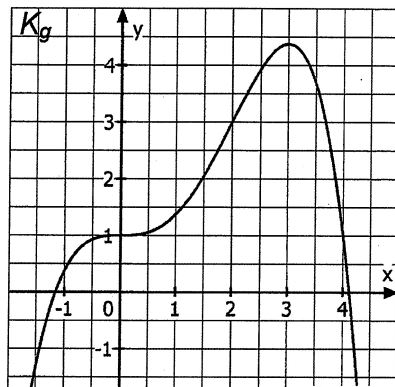
Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2014

Die Abbildungen zeigen die Schaubilder K_g und K_h der Funktionen g und h .



3.1

Begründen Sie mit Hilfe von vier Eigenschaften, dass K_h das Schaubild der Ableitungsfunktion von g ist.

(4 Punkte)

Zum Schaubild K_h gehört der Funktionsterm $h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$

3.2

Berechnen Sie alle Stammfunktionen der Funktion h .

Welche dieser Stammfunktionen gehört zu K_g ?

(3 Punkte)

3.3

Vom Punkt $P(2/4, 5)$ aus wird eine Tangente an K_h gelegt.

Berechnen Sie die Gleichung dieser Tangente.

(6 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen u und v mit

$$u(x) = 2 \cos(x) + 3 \quad \text{und} \quad v(x) = -2 \cos(x) + 1, \quad x \in [0; 2\pi].$$

Ihre Schaubilder heißen K_u und K_v .

3.4

Geben Sie den Wertebereich sowie die exakte Periodenlänge der Funktion u an.

Zeigen Sie, dass die Wendepunkte von K_u auf der Geraden $y = 3$ liegen.

(5 Punkte)

3.5

Zeichnen Sie die Schaubilder K_u und K_v in ein gemeinsames Koordinatensystem.

Beschreiben Sie, wie das Schaubild K_v aus dem Schaubild K_u hervorgeht. (7 Punkte)

3.6

Lena bereitet sich auf die anstehende Mathematikprüfung vor.

In Ihrem Heft findet sie folgenden Aufschrieb:

$$u(x) = v(x)$$

$$2\cos(x) + 3 = -2\cos(x) + 1$$

$$4\cos(x) = -2$$

$$\cos(x) = -0,5$$

$$x = \frac{2}{3}\pi$$

$$A = \int_0^{\frac{2}{3}\pi} ((2\cos(x) + 3) - (-2\cos(x) + 1)) dx = 2\sqrt{3} + \frac{4}{3}\pi$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung.

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung

3.1

Begründung für Ableitungsfunktion

An der Stelle $x = 3$ besitzt K_g einen Hochpunkt und K_h eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach -.

An der Stelle $x = 0$ besitzt K_g einen Wendepunkt und K_h einen Extrempunkt.

An der Stelle $x = 2$ besitzt K_g einen Wendepunkt und K_h einen Extrempunkt.

An der Stelle $x = 0$ besitzt K_g eine waagrechte Tangente und K_h eine Nullstelle.

3.2

$$h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2$$

$$H(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c \text{ mit } c \in \mathbb{R}$$

Das Schaubild K_g geht durch den Punkt $P(0/1)$.

$$\text{Einsetzen von P in die Funktion } H(x): 1 = -\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 0 + c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Die gesuchte Stammfunktion lautet } H(x) = -\frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + 1$$

3.3

$$\text{Es gilt } h(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \text{ und } h'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$$

$$\text{Allgemeine Tangentengleichung: } y = h'(u) \cdot (x - u) + h(u)$$

Einsetzen der Koordinaten von P in x und y:

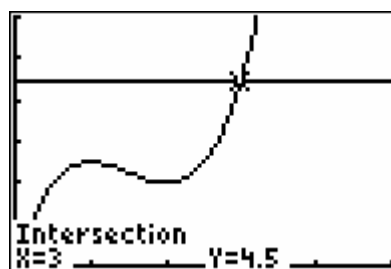
$$4,5 = h'(u) \cdot (2 - u) + h(u)$$

$$4,5 = \left(-\frac{3}{2}u^2 + 3u\right) \cdot (2 - u) - \frac{1}{2}u^3 + \frac{3}{2}u^2$$

Lösung der Gleichung mit dem GTR:

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=4.5
\Y2=(-3/2*X^2+3X)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
    
```



Die Gleichung besitzt die Lösung $u = 3$.

Gleichung der Tangente:

Setze $u = 3$ in die allgemeine Tangentengleichung ein:

$$y = h'(3) \cdot (x - 3) + h(3) \quad \text{mit } h(3) = 0 \text{ und } h'(3) = -4,5$$

$$y = -4,5 \cdot (x - 3) + 0 \Rightarrow y = -4,5x + 13,5 \quad \text{ist die Gleichung der Tangente}$$

3.4

Wertebereich und Periodenlänge

$$y = \cos(bx) \text{ besitzt die Periode } p = \frac{2\pi}{b}$$

Der Wertebereich entspricht dem Intervall, den die y -Werte annehmen können. Hierzu benötigt man die Amplitude und die Verschiebung nach oben/unten

$$\text{Es ist } u(x) = 2\cos(x) + 3$$

$$\text{Die Periode lautet } p = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$$

Die Funktion $y = \cos(x)$ hat den Wertebereich $[-1 ; 1]$

Die Funktion $y = 2\cos(x)$ hat den Wertebereich $[-2 ; 2]$

Die Funktion $y = 2\cos(x) + 3$ hat den Wertebereich $[1 ; 5]$

Den Wertebereich kann man auch durch Einzeichnen des Schaubildes von $u(x)$ in den GTR bestimmen.

Wendepunktnachweis

Bedingung für Wendepunkt: $u''(x) = 0$ und $u'''(x) \neq 0$

Ableitungen:

$$u(x) = 2\cos(x) + 3$$

$$u'(x) = -2\sin(x)$$

$$u''(x) = -2\cos(x)$$

$$u'''(x) = 2\sin(x)$$

$$u''(x) = 0 \Rightarrow -2\cos(x) = 0 \stackrel{:(-2)}{\Rightarrow} \cos(x) = 0 \Rightarrow x = 0,5\pi \text{ und } x = 1,5\pi$$

Beachte: Es müssen nur die Lösungen im Intervall $[0; 2\pi]$ bestimmt werden.

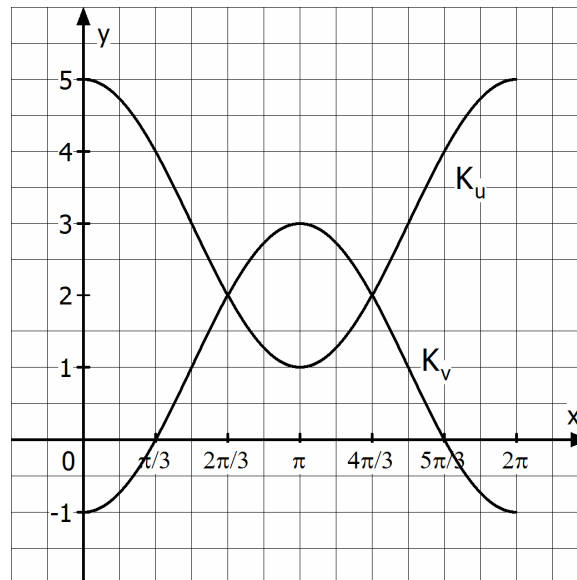
$$u'''(0,5\pi) = 2 \neq 0 \quad \text{und} \quad u'''(1,5\pi) = -2 \neq 0 \quad \text{also existieren zwei Wendestellen.}$$

Es gilt $u(0,5\pi) = u(1,5\pi) = 3$, somit haben beide Wendepunkte den y -Wert $y = 3$.

Damit liegen die Wendepunkte auf der waagrechten Geraden $y = 3$.

3.5

Zeichnung



Beschreibung, wie die Schaubilder zusammenhängen

Hier wird gefragt, wie man die Funktionsgleichung von $u(x)$ "manipulieren" muss, um das Schaubild von $v(x)$ zu erhalten.

$-u(x)$ bedeutet eine Spiegelung des Schaubildes von $u(x)$ an der x -Achse

$u(x) + c$ bedeutet eine Verschiebung des Schaubildes von $u(x)$ um c nach oben

$$u(x) = 2\cos(x) + 3$$

Multiplikation mit -1 ergibt $-u(x) = -2\cos(x) - 3$

Addition von 4 ergibt $-u(x) + 4 = -2\cos(x) + 1$ und dies entspricht $v(x)$

Anschaulich heißt dies, dass das Schaubild von $u(x)$ zunächst an der x -Achse gespiegelt wird und dann um 4 Einheiten nach oben verschoben wird.

Dann erhält man das Schaubild von $v(x)$.

3.6

Aufgabenstellung von Lena

Da die Funktionen in 3.5 in ein Koordinatensystem eingezeichnet werden, kann man sich die Fläche, die durch das Integral berechnet wird, auch anschaulich vorstellen.

Eine passende Aufgabenstellung ist die Folgende:

Gegeben sind die Funktionen $u(x) = 2\cos(x) + 3$ und $v(x) = -2\cos(x) + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$

Ihre Schaubilder schließen gemeinsam mit der y -Achse eine Fläche ein.

Berechnen Sie den exakten Inhalt der Fläche.