

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2014

Baden-Württemberg

Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2014

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 2 \sin(\pi x) + 2$ und $x \in [-1; 4]$.

Ihr Schaubild ist K_f .

2.1

Zeichnen Sie K_f .

Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f mit den Koordinatenachsen.

(5 Punkte)

2.2

Der Punkt $W(1/2)$ ist ein Wendepunkt von K_f .

Zeigen Sie, dass die Gerade mit der Gleichung $y = -2\pi x + 2 + 2\pi$ Tangente an K_f im Punkt W ist.

Die Tangente, die y -Achse und K_f schließen eine Fläche ein.

Berechnen Sie den exakten Inhalt dieser Fläche.

(8 Punkte)

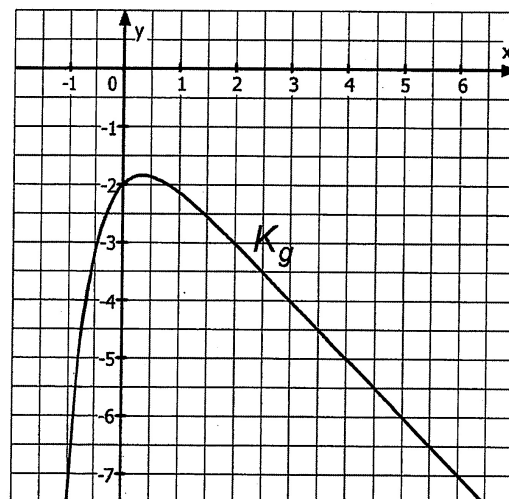
2.3

Die Abbildung zeigt das Schaubild K_g einer Funktion g .

2.3.1

Begründen Sie jeweils, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

- a) Die Ableitungsfunktion von g hat im Intervall $[0; 1]$ eine Nullstelle.
- b) Das Schaubild einer Stammfunktion von g hat im Intervall $[0; 1]$ einen Hochpunkt.



(4 Punkte)

2.3.2

Ermitteln Sie mit Hilfe der Abbildung die Gleichung der Tangente an K_g an der Stelle

$x = -0.5$.

(3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion h mit $h(x) = -e^{-2x} - x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Ihr Schaubild ist K_h .

2.4

Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes von K_h an.

Untersuchen Sie rechnerisch das Krümmungsverhalten von K_h .

Anton behauptet: " K_h besitzt keine Schnittpunkte mit der x -Achse."

Nehmen Sie Stellung zu dieser Behauptung.

(6 Punkte)

2.5

Die Gerade mit der Gleichung $x = u$ schneidet für $0 < u < 1$ das Schaubild K_f im Punkt P und das Schaubild K_h im Punkt Q .

Für welchen Wert von u ist der Abstand der Punkte P und Q maximal ?

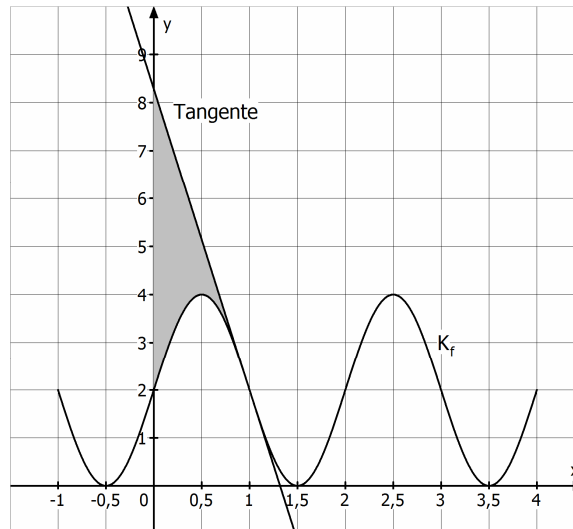
(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung

2.1

Zeichnung des Schaubildes von f (inklusive der Tangente für Aufgabe 2.2)



Schnittpunkt mit der y-Achse:

$$f(0) = 2 \cdot \sin(0) + 2 = 2 \quad \text{Schnittpunkt } S_y(0/2)$$

Gemeinsame Punkte mit der x-Achse:

Die gemeinsamen Punkte kann man direkt aus dem Schaubild ablesen.

$$\text{Bedingung: } f(x) = 0$$

Im vorgegebenen Intervall gibt es drei gemeinsame Punkte:

$$N_1(-0,5/0) \quad ; \quad N_2(1,5/0) \quad ; \quad N_3(3,5/0)$$

2.2

Tangentennachweis:

Die gegebene Gerade ist eine Tangente in W, wenn die Tangente den Punkt W enthält und die Steigung der Gerade der Steigung von f an der Stelle $x = 1$ entspricht.

1.Kontrolle: Liegt $W(1/2)$ auf der Gerade ?

$$\text{Einsetzen der Koordinaten von W in die Gerade: } 2 = -2\pi \cdot 1 + 2 + 2\pi \Rightarrow 2 = 2$$

Da die Aussage wahr ist, liegt W auf der Gerade.

2.Kontrolle: Ist die Geradensteigung die Steigung von f bei $x = 1$?

Die gegebene Gerade besitzt die Steigung $m = -2\pi$

Es ist $f'(x) = 2\cos(\pi x) \cdot \pi$.

Die Steigung an der Stelle $x = 1$ ist $f'(1) = 2\cos(\pi) \cdot \pi = -2\pi$

Da auch die Steigungen übereinstimmen, ist die Gerade die Tangente in W.

Flächeninhalt

Die Tangente berührt das Schaubild von f im Punkt $W(1/2)$ an der Stelle $x = 1$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^1 (-2\pi x + 2 + 2\pi - (2\sin(\pi x) + 2)) dx = \int_0^1 (-2\pi x + 2\pi - 2\sin(\pi x)) dx \\ &= \left[-\pi x^2 + 2\pi \cdot x + 2\cos(\pi x) \cdot \frac{1}{\pi} \right]_0^1 = -\pi + 2\pi - \frac{2}{\pi} - \left(-0 + 0 + \frac{2}{\pi} \right) = \pi - \frac{4}{\pi} \end{aligned}$$

2.3.1

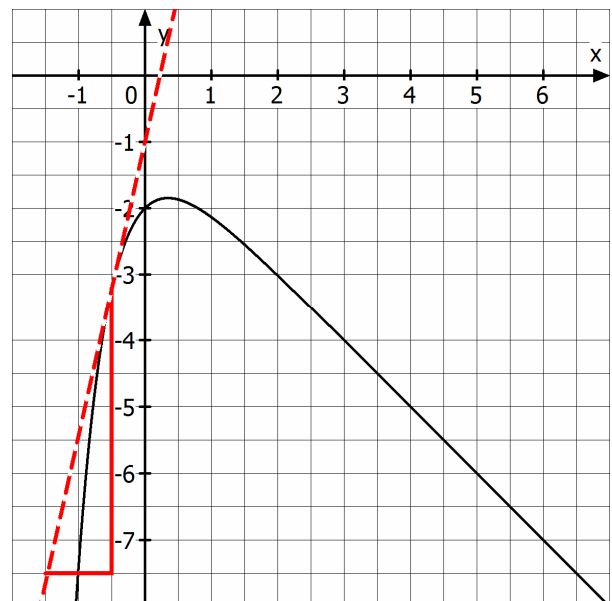
Begründung der Aussagen

- a) Im Intervall $[0;1]$ hat das Schaubild von g einen Hochpunkt.
Somit hat die Ableitung dort eine Nullstelle. Die Aussage ist wahr.
- b) Wenn die Stammfunktion von g einen Hochpunkt besitzt, hat die zugehörige Ableitungsfunktion (das wäre in diesem Fall das dargestellte Schaubild) eine Nullstelle.
Da das Schaubild keine Nullstelle hat, hat die zugehörige Stammfunktion auch keinen Hochpunkt. Die Aussage ist falsch.

2.3.2

Mögliche Tangentengleichung:

Zur Bestimmung einer Tangentengleichung zeichnet man so genau wie möglich an der Berührstelle $x = -0,5$ eine Tangente in die Zeichnung ein und liest den y -Achsenabschnitt und die Steigung (mit dem Steigungsdreieck) ab.



Die eingezeichnete Tangente schneidet die y-Achse in $S(0/-1)$.
Die Steigung der Gerade ist ungefähr $m = 4$.

Mögliche Tangentengleichung: $y = 4x - 1$

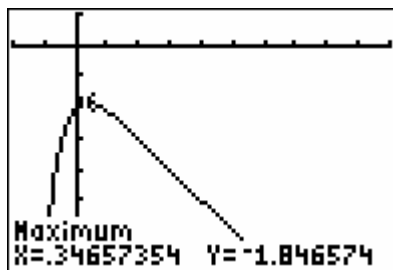
Die exakte Lösung wäre $y = 4,436x - 1$

2.4

Berechnung des Hochpunktes

Der Hochpunkt kann mit dem GTR berechnet werden.

Bedingung: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$



GTR: Hochpunkt $H(0,347/-1,847)$

Krümmungsverhalten

Ist $h''(x) > 0$ dann ist das Schaubild von $h(x)$ linksgekrümmt.

Ist $h''(x) < 0$ dann ist das Schaubild von $h(x)$ rechtsgekrümmt

Ableitungen:

$$h'(x) = -e^{-2x} \cdot (-2) - 1 = 2e^{-2x} - 1$$

$$h''(x) = 2e^{-2x} \cdot (-2) = -4e^{-2x}$$

Da der Ausdruck $e^{-2x} > 0$ ist, folgt daraus $h''(x) = -4e^{-2x} < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$

Damit ist das Schaubild von h rechtsgekrümmt (was sich durch das Schaubild bestätigt).

Antons Behauptung

Wenn man das Schaubild von $h(x)$ mit dem GTR zeichnet, stellt man fest, dass Antons Behauptung richtig ist.

Eine Kontrolle mit dem GTR ist jedoch noch kein Nachweis, man muss dies anhand der bisherigen Informationen über das Schaubild von h begründen.

Der Hochpunkt $H(0,347/-1,847)$ liegt unterhalb der x-Achse.

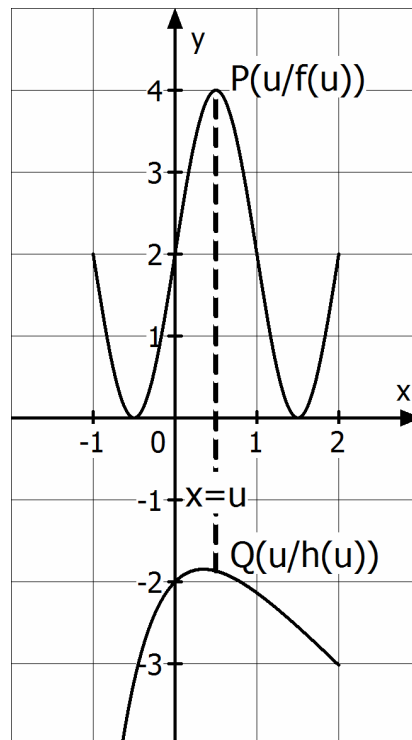
Da das Schaubild außerdem komplett rechtsgekrümmt ist, besitzt das Schaubild keinen Wendepunkt und damit auch keinen Tiefpunkt.

Somit bleibt das Schaubild unterhalb der x-Achse. Antons Behauptung ist richtig.

2.5

Maximaler Abstand zwischen P und Q

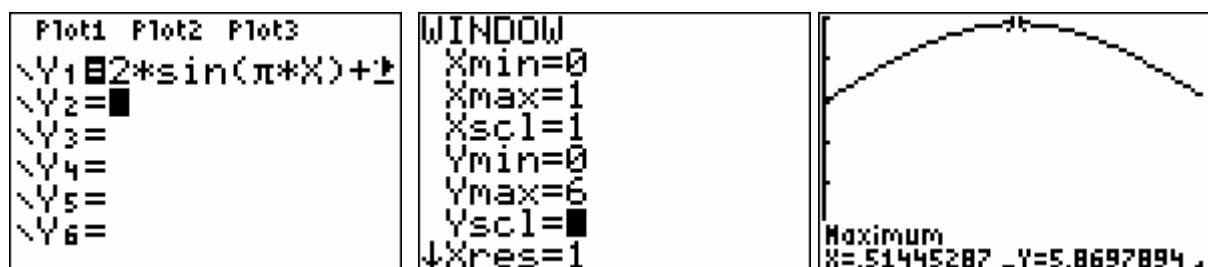
Die Aufgabenstellung sollte zunächst anhand einer Zeichnung veranschaulicht werden.
Es muss eine Funktion in Abhängigkeit von u aufgestellt werden, die den Abstand der beiden Punkten P und Q beschreibt.
Von dieser Funktion muss mit dem GTR das Maximum bestimmt werden.



Der senkrechte Abstand der Punkte P und Q beträgt $d(u) = f(u) - h(u)$

$$\Rightarrow d(u) = 2\sin(\pi \cdot u) + 2 - (-e^{-2u} - u - 1)$$

Bestimmung des Maximums von $d(u)$ mit dem GTR im Intervall $0 < u < 1$:



Für $u \approx 0,51$ gibt es ein Maximum mit $d(0,51) \approx 5,87$

Die Randwerte ergeben $d(0) = 4$ und $d(1) \approx 4,14$ und sind jeweils kleiner als 5,87.

Für $u \approx 0,51$ ist der Abstand der Punkte maximal.