

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2014

Baden-Württemberg

Aufgabe 1 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

September 2014

1.1

Das Schaubild einer Funktion 3. Grades berührt die x-Achse bei $x = -3$ und verläuft durch den Ursprung.

Weiterhin liegt der Punkt $A(1/\frac{16}{3})$ auf dem Schaubild der Funktion.

Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion. (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Ihr Schaubild ist K_f .

1.2

Bestimmen Sie die Koordinaten der gemeinsamen Punkte von K_f mit der x-Achse sowie der Extrem- und Wendepunkte von K_f .

Zeichnen Sie K_f in ein geeignetes Koordinatensystem. (7 Punkte)

1.3

K_f schließt mit der x-Achse eine Fläche ein.

Bestimmen Sie den Flächeninhalt.

Berechnen Sie mithilfe einer Stammfunktion, für welchen Wert von u mit $u > -3$ gilt:

$$\int_{-3}^u f(x) dx = 0 \quad (6 \text{ Punkte})$$

Gegeben sind die Funktionen g mit $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{7}{2}$ und $h(x) = e^{\frac{1}{2}x}$; $x \in \mathbb{R}$

Das Schaubild von g ist K_g , das Schaubild von h ist K_h .

1.4

K_h soll in y-Richtung so verschoben werden, dass K_g den verschobenen Graphen auf der y-Achse schneidet. Bestimmen Sie den neuen Funktionsterm. (4 Punkte)

1.5

Die Kurve K_g und die Gerade mit der Gleichung $y = -8$ begrenzen eine Fläche.

In diese Fläche soll ein zur y-Achse symmetrisches Dreieck mit den Eckpunkten $S(0/-8)$ und $P(u/g(u))$ mit $0 \leq u \leq 3$ einbeschrieben werden.

Skizzieren Sie diesen Sachverhalt für $u = 2$.

Berechnen Sie den Inhalt des Dreiecks mit dem größten möglichen Flächeninhalt. (7 Punkte)

30 Punkte

Lösung

1.1

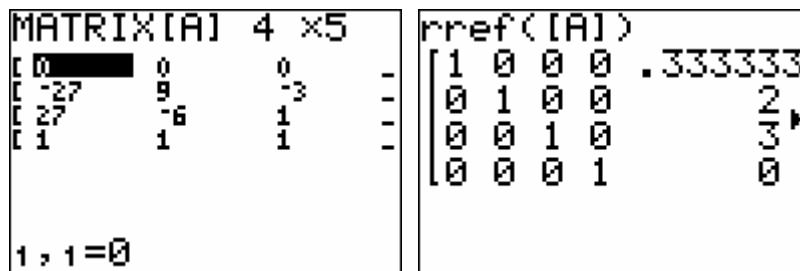
Aufstellen des Funktionsterms

Ansatz: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Bedingungen:

- 1.) $O(0/0)$ liegt auf dem Schaubild: $f(0) = 0 \Rightarrow d = 0$
- 2.) $N(-3/0)$ liegt auf dem Schaubild: $f(-3) = 0 \Rightarrow -27a + 9b - 3c + d = 0$
- 3.) Berührung der x-Achse bei $x = 3$: $f'(3) = 0 \Rightarrow 27a - 6b + c = 0$
- 3.) $A(1/\frac{16}{3})$ liegt auf dem Schaubild: $f(1) = \frac{16}{3} \Rightarrow a + b + c + d = \frac{16}{3}$

Lösung des entstehenden Gleichungssystems mit dem GTR:



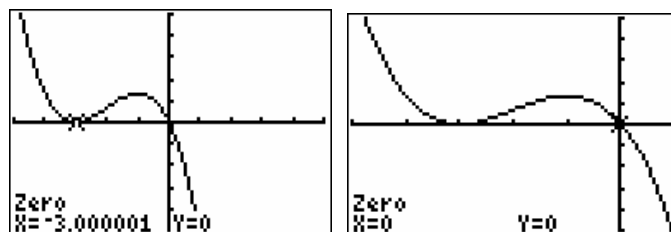
$$a = \frac{1}{3}; b = 2; c = 3; d = 0$$

Die Funktionsgleichung lautet $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x$

1.2

Gemeinsame Punkte mit der x-Achse

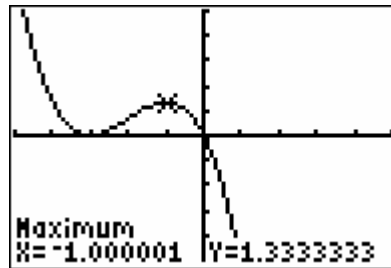
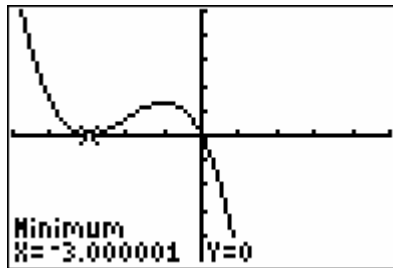
Bedingung: $f(x) = 0$



GTR: $N_1(-3/0)$ und $N_2(0/0)$

Extrempunkte:

Bedingung: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$



GTR: Hochpunkt $H(-1/\sqrt{3})$ und Tiefpunkt $T(-3/0)$

Wendepunkte:

Ableitungen:

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 3x$$

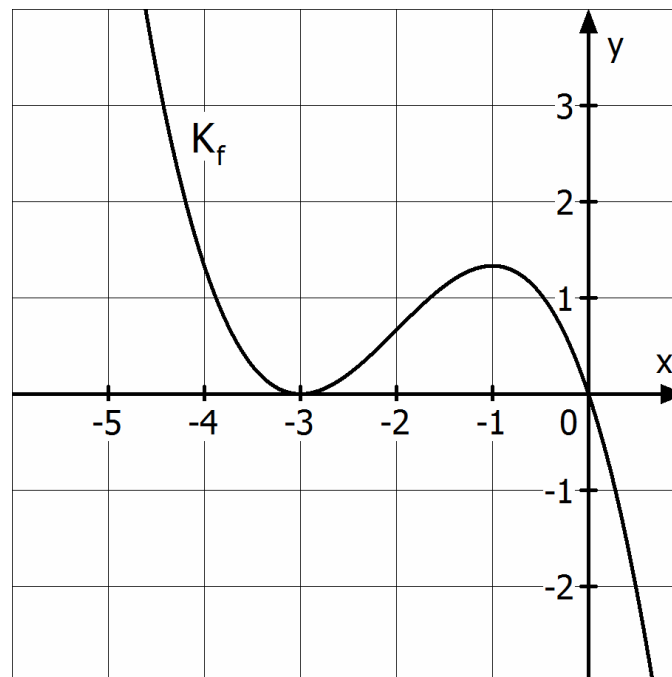
$$f'(x) = -x^2 - 4x - 3 \quad \text{und} \quad f''(x) = -2x - 4 \quad \text{und} \quad f'''(x) = -2$$

Bedingung: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow -2x - 4 = 0 \Rightarrow x = -2$$

$$f'''(-2) = -2 \neq 0 \Rightarrow W(-2 / f(-2)) \Rightarrow W(-2 / \frac{2}{3})$$

Zeichnung



1.3

Flächeninhalt zwischen x-Achse und Schaubild von f:

Mit Hilfe der Nullstellen aus 1.2 kann das Integral aufgestellt werden:

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = 2.25$$

$$\int_{-3}^0 f(x) dx = 2,25 \text{ Flächeneinheiten (GTR)}$$

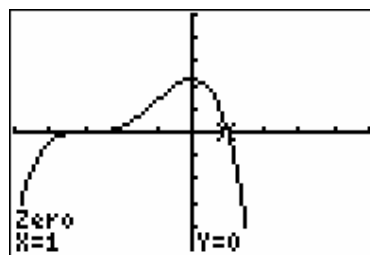
Berechnung von u:

$$\begin{aligned} \int_{-3}^u f(x) dx &= \left[-\frac{1}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 \right]_{-3}^u = -\frac{1}{12}u^4 - \frac{2}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 - (-6,75 + 18 - 13,5) \\ &= -\frac{1}{12}u^4 - \frac{2}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 2,25 \end{aligned}$$

$$\text{Bedingung: } -\frac{1}{12}u^4 - \frac{2}{3}u^3 - \frac{3}{2}u^2 + 2,25 = 0$$

Lösung der Gleichung mit dem GTR:

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=-1/12*X^4-2/3*X^3-3/2*X^2+2.25
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
```



Es ergibt sich $u = 1$ (da die andere Lösung $u = -3$ nicht zulässig ist)

1.4

Bestimmung des neuen Funktionsterms

Schnittpunkt von $g(x)$ mit der y-Achse:

$$g(0) = -3,5 \text{ also } S_y(0 / -3,5)$$

Die verschobene Funktion habe die Gleichung $h^*(x) = e^{\frac{1}{2}x} + c$

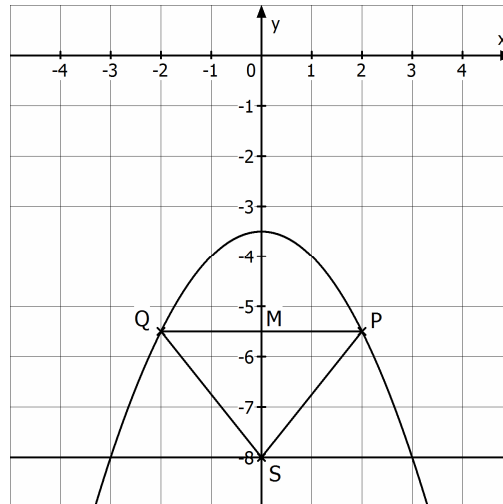
$$S_y(0 / -3,5) \text{ soll auf } h^* \text{ liegen: } -3,5 = e^0 + c \Rightarrow c = -4,5$$

$$h^*(x) = e^{\frac{1}{2}x} - 4,5$$

1.5

Skizze für $u = 2$:

Die Eckpunkte des Dreiecks haben die Koordinaten $S(0/-8)$, $P(2/g(2)) = P(2/-5,5)$ und $Q(-2/g(-2)) = Q(-2/-5,5)$



Maximaler Flächeninhalt

Der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt $A = \frac{1}{2} \cdot \overline{PQ} \cdot \overline{MS}$

Der x-Wert von P ist $x = u$. Daher ist $\overline{PQ} = 2u$

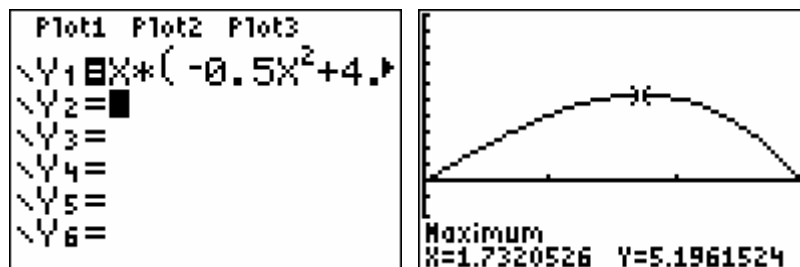
Der y-Wert von M ist $y = g(u)$ und der y-Wert von S ist $y = -8$.

Daher gilt $\overline{MS} = g(u) - (-8) = g(u) + 8$

Eingesetzt in die Flächenformel: $A = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot (g(u) + 8)$ bzw. $A = \frac{1}{2} \cdot 2u \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2 - \frac{7}{2} + 8\right)$

Vereinfacht: $A = u \cdot \left(-\frac{1}{2}u^2 + 4,5\right)$

Maximum von $A(u)$ mit dem GTR:



GTR: Das Maximum wird erreicht für $u \approx 1,73$ mit $A(1,73) \approx 5,2$

Für die Randwerte gilt: $A(0) = 0$ und $A(3) = 0$ die jeweils kleiner als 5,2 FE sind.
Der größtmögliche Dreiecksflächeninhalt beträgt 5,2 FE.