

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2013

Baden-Württemberg

Aufgabe 7 Mathematik in der Praxis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

7.1

Die AutoSystem GmbH hat eine neue Traktionskontrolle entwickelt. Dieses neue System soll den Beschleunigungsvorgang beim Anfahren verbessern. Zum Zeitpunkt der Markteinführung ist das Unternehmen der einzige Anbieter.

7.1.1

Die Marktforschung ergibt, dass bei einem Preis von 1450 € 30 Systeme und bei einem Preis von 600 € 200 Systeme verkauft werden können.

Bestimmen Sie einen geeigneten Funktionsterm, der die Abhängigkeit des Preises von der Menge der verkauften Systeme beschreibt.

Geben Sie die Erlösfunktion E an und zeichnen Sie das Schaubild von E in ein Koordinatensystem für $0 \leq x \leq 250$.

(6 Punkte)

7.1.2

Das Rechnungswesen liefert folgende Daten für die Kostenkalkulation:

Fixe Kosten: 20.000 €

Kostenzuwachs pro System bei 120 produzierten Systemen: 60 €

Gesamtkosten von 250 produzierten Systemen: 135.625 €

Variable Stückkosten bei 80 produzierten Systemen: 420 €

Die Gesamtkostenfunktion soll durch eine ganzrationale Funktion 3. Grades beschrieben werden.

Bestimmen Sie die Gesamtkostenfunktion K .

Zeichnen Sie das Schaubild von K in das Koordinatensystem aus 7.1.1

(6 Punkte)

7.2

Die AutoSystem GmbH kalkuliert mit der Gesamtkostenfunktion K mit

$$K(x) = \frac{1}{40}x^3 - 8x^2 + 900x + 20000 \text{ und der Erlösfunktion } E \text{ mit}$$

$$E(x) = -5x^2 + 1600x \text{ für } 0 \leq x \leq 250.$$

7.2.1

Berechnen Sie, für welche Produktionsmenge der Kostenzuwachs am geringsten ist.

(2 Punkte)

7.2.2

Ermitteln Sie den Preis pro System, so dass das Unternehmen einen maximalen Gewinn erzielt.

(4 Punkte)

7.2.3

Zeichnen Sie in das Schaubild von 7.1.1 vom Punkt $P(0/20000)$ aus eine Tangente an K ein. Berechnen Sie die Steigung dieser Tangente und erläutern Sie die wirtschaftliche Bedeutung der Steigung.

(4 Punkte)

7.3

Die AutoSystem GmbH führt zwei Testreihen durch, um die Funktionsfähigkeit des neuen Systems zu prüfen. Dabei wird in jeweils fünf Versuchen die Zeit in Sekunden gemessen, die es dauert, um aus dem Stand heraus auf eine Geschwindigkeit von 100 km/h zu beschleunigen. Die erste Testreihe wird von einem erfahrenen Autofahrer ohne das neue System durchgeführt. Anschließend wird das neue System eingebaut und die Messung in einer zweiten Testreihe wiederholt.

In der folgenden Tabelle sind die Messergebnisse festgehalten:

Messung	1	2	3	4	5
Zeit in Sekunden (ohne neues System)	7,31	7,42	6,99	7,25	7,13
Zeit in Sekunden (mit neuem System)	7,11	7,10	7,13	7,12	7,14

7.3.1

Berechnen Sie den Mittelwert und Standardabweichung der beiden Versuchsreihen. Welche Schlüsse lassen sich aus diesen Ergebnissen über die Funktionsfähigkeit des neuen Systems ziehen ?

Begründen Sie, weshalb ein mit dem neuen System ausgestattetes Fahrzeug einem Fahrzeug ohne das neue System nicht immer überlegen ist.

(4 Punkte)

7.3.2

Angenommen die Zeit, die ein Fahranfänger ohne das neue System für die Beschleunigung von 0 auf 100 km/h benötigt, ist normal verteilt mit einem Erwartungswert von 10,2 Sekunden und einer Standardabweichung von 1,9 Sekunden.

Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass dieser Autofahrer die schlechteste Zeit aus der obigen Testreihe unterbietet ?

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung

7.1.1

Die Preisfunktion $p(x)$ hat die Gestalt $p(x) = ax + b$.

Die Berechnung von a und b erfolgt über das Einsetzen der gegebenen Werte:

$$1450 = a \cdot 30 + b$$

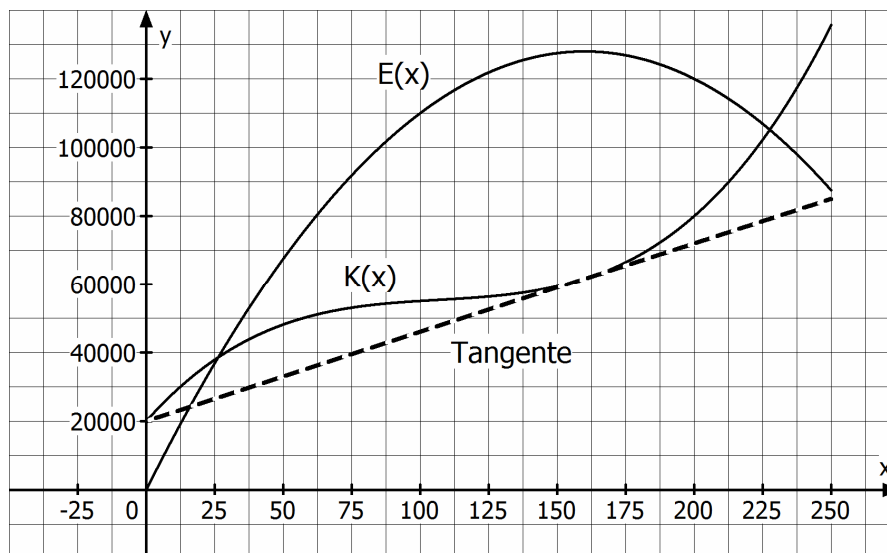
$$600 = a \cdot 200 + b$$

Lösung des Gleichungssystems mit dem GTR ergibt $a = -5$ und $b = 1600$.

$$p(x) = -5x + 1600$$

Die Erlösfunktion hat die Gestalt $E(x) = x \cdot p(x) = -5x^2 + 1600x$

Schaubild der Erlösfunktion sowie der Schaubilder gemäß der folgenden Aufgabenstellungen:



7.1.2

Für die Kostenfunktion gilt: $K(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $K'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Die variable Kostenfunktion lautet $K_v(x) = ax^3 + bx^2 + cx$

Die variable Stückkostenfunktion lautet $k_v(x) = \frac{K_v(x)}{x} = ax^2 + bx + c$

Die Bedingungen lauten:

$$K(0) = 20000 \Rightarrow d = 20000$$

$$K'(120) = 60 \Rightarrow 43200a + 240b + c = 60$$

$$K(250) = 135625 \Rightarrow 15625000a + 62500b + 250c + d = 135625$$

$$k_v(80) = 420 \Rightarrow 6400a + 80b + c = 420$$

Lösung des Gleichungssystems (mit GTR): $a = \frac{1}{40}$; $b = -8$; $c = 900$ und $d = 20000$

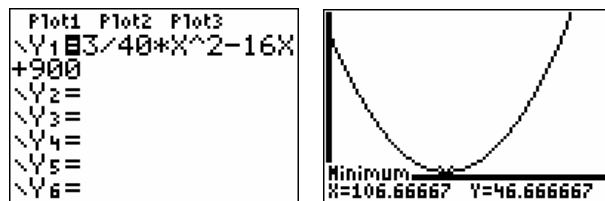
Die Kostenfunktion lautet $K(x) = \frac{1}{40}x^3 - 8x^2 + 900x + 20000$

7.2.1

Der Kostenzuwachs wird ausgedrückt durch die Ableitungsfunktion

$$K'(x) = \frac{3}{40}x^2 - 16x + 900$$

Gesucht ist das Minimum von $K'(x)$:



Die Ableitungsfunktion wird minimal für $x = 106,67$.

Bei einer Produktionsmenge von 107 ME ist der Kostenzuwachs am geringsten.

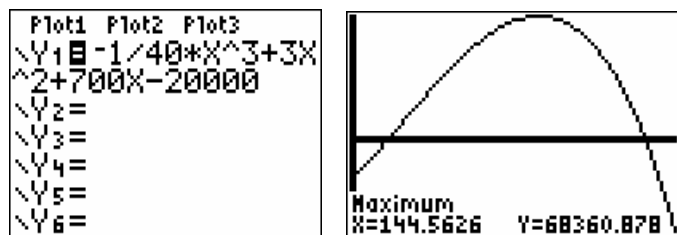
7.2.2

Die Gewinnfunktion lautet

$$G(x) = E(x) - K(x) = -5x^2 + 1600x - \left(\frac{1}{40}x^3 - 8x^2 + 900x + 20000\right)$$

$$\text{Zusammengefasst: } G(x) = -\frac{1}{40}x^3 + 3x^2 + 700x - 20000$$

Berechnung des Maximums von $G(x)$ mit dem GTR:



Der Gewinn wird maximal für $x = 144,56$ ME

Der Preis pro System beträgt $p(144,56) = -5 \cdot 144,56 + 1600 = 877,20$ Euro

7.2.3

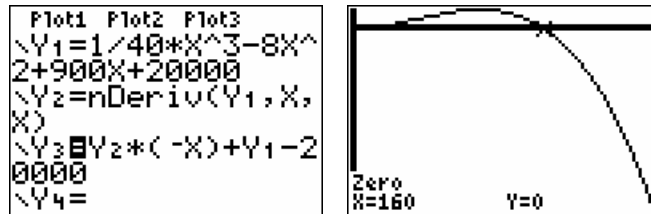
Die allgemeine Tangentenformel an $K(x)$ lautet: $y = K'(u) \cdot (x - u) + K(u)$

Einsetzen des bekannten Tangentenpunktes $P(0/20000)$ in die Tangentenformel:

$$20000 = K'(u) \cdot (0 - u) + K(u)$$

$$\Rightarrow 0 = K'(u) \cdot (-u) + K(u) - 20000$$

Die Berechnung von u aus der Gleichung erfolgt mit dem GTR:



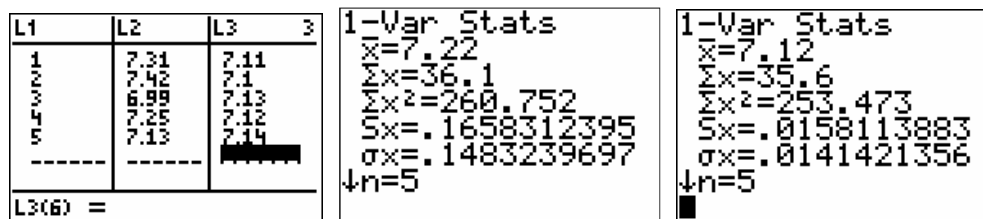
Die Tangente berührt das Schaubild von $K(x)$ an der Stelle $x = 160$.

Die Tangentensteigung $K'(160) = 260$.

Der Wert von $x = 160$ entspricht dem Betriebsminimum. Die Steigung $m = 260$ entspricht den minimalen variablen Stückkosten und wird auch kurzfristige Preisuntergrenze genannt.

7.3.1

Mit dem GTR werden die Messergebnisse in die Listen L2 und L3 eingetragen. Danach können mit dem GTR der Mittelwert und die Standardabweichung berechnet werden:



Ohne neues System: Mittelwert = 7,22 und Standardabweichung = 0,148

Mit neuem System: Mittelwert = 7,12 und Standardabweichung = 0,014

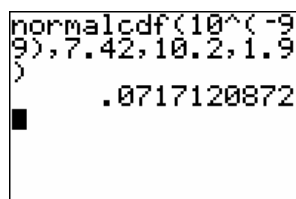
Das neue System funktioniert besser, da der Mittelwert von 7,22 auf 7,12 Sekunden sinkt. Die Standardabweichung nimmt ebenfalls ab von 0,148 auf 0,014. Das heißt, dass im neuen System weniger Ausreißer vorkommen.

An der 3. Messung kann man jedoch erkennen, dass das neue System nicht immer besser funktionieren muss.

7.3.2

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 7,42)$ wobei X normalverteilt ist mit Mittelwert 10,2 und Standardabweichung 1,9.

Lösung mit dem GTR:



Die Wahrscheinlichkeit beträgt etwa 7,17%.