

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2013

Baden-Württemberg

Aufgabe 6 Stochastik

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Juni 2015

Die Rabbit AG stellt Schokoladeneier mit Füllung her. Aufgrund eines Fehlers in der Produktion haben 10% der hergestellten Eier keine Füllung.

6.1

Der laufenden Produktion werden drei Eier entnommen.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

A: alle drei Eier eine Füllung haben,

B: höchstens ein Ei keine Füllung enthält,

C: mindestens ein Ei eine Füllung enthält.

Geben Sie ein Ereignis D an, dessen Wahrscheinlichkeit sich folgendermaßen berechnen lässt: $P(D) = 0,9^3 + 0,1^3$.

(10 Punkte)

Da der Fehler viel zu spät bemerkt wird, ist die Produktion zunächst weitergelaufen.

Die Eier wurden in den Farben Gold, Silber, Rot und Blau im Verhältnis 1:2:3:3 verpackt.

6.2

Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, das alle Füllung-Farbe-Kombinationen und deren Wahrscheinlichkeiten für ein produziertes Ei angibt.

Welche Füllung Farbe-Kombination kommt häufiger vor:

- goldenes Ei mit Füllung oder

- rotes Ei ohne Füllung ?

Welche Füllung-Farbe-Kombinationen kommen am häufigsten vor ?

(8 Punkte)

6.3

Für eine Werbeaktion werden die verpackten Eier in ein undurchsichtiges Gefäß gegeben.

Die Kunden dürfen für einen Betrag von 10 Cent blind ein Ei herausholen. Ist das Ei ein

goldenes ohne Füllung, bekommt der Kunde 50 Cent, ist das Ei ein silbernes ohne Füllung,

bekommt er 20 Cent, und ist das Ei ein anderes ohne Füllung, bekommt er 15 Cent zurück.

Ist das Ei mit Füllung, verfällt der Einsatz.

Prüfen Sie, ob das Unternehmen dabei auf lange Sicht Verlust macht.

Wie hoch dürfte der Auszahlungsbetrag für ein goldenes Ei ohne Füllung maximal sein,

wenn sich das Unternehmen bei 250 Ziehungen mit einem Gewinn von 10 Euro zufrieden

geben würde ?

(8 Punkte)

Durch eine Neujustierung der Produktionsanlage kann der Anteil der Eier ohne Füllung

deutlich gesenkt werden. Je drei Eier werden in ein Nest gelegt. Die Abteilung für

Qualitätssicherung schreibt vor, dass es bei höchstens 5% aller Nester zu einer Reklamation wegen fehlender Füllung kommen darf.

6.4

Bestimmen Sie den maximal zulässigen Anteil der Eier ohne Füllung, die die

Produktionsanlage herstellen darf, um die Vorgabe einzuhalten.

(4 Punkte)

30 Punkte

Lösung

6.1

F: Ei hat eine Füllung mit $P(F) = 0,9$

$\bar{F}$: Ei hat keine Füllung mit $P(\bar{F}) = 0,1$

$$P(A) = P(FFF) = 0,9^3 = 0,729$$

$$P(B) = P(FFF) + 3 \cdot P(FF\bar{F}) = 0,9^3 + 3 \cdot 0,9^2 \cdot 0,1 = 0,972$$

Der Faktor 3 entsteht dadurch, dass das Ei ohne Füllung an erster, zweiter oder dritter Stelle auftauchen kann.

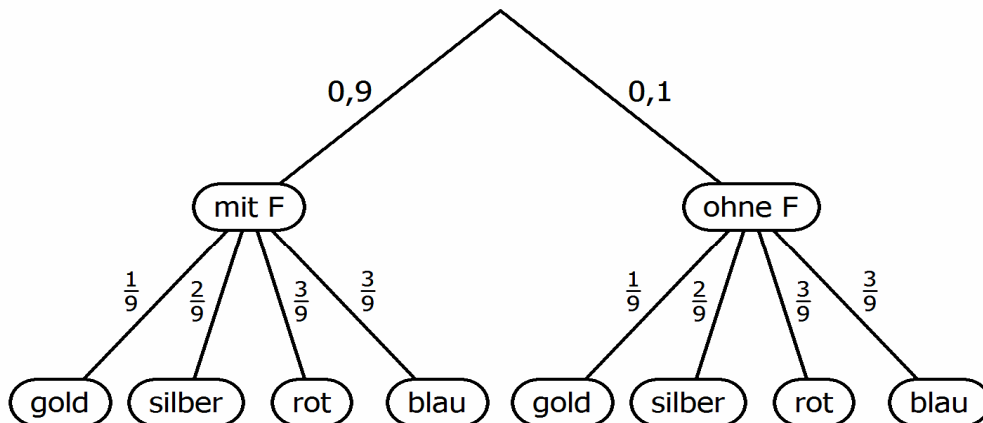
$$P(C) = 1 - P(\text{kein Ei hat eine Füllung}) = 1 - 0,1^3 = 0,999$$

Das Ereignis D mit der Wahrscheinlichkeit $P(D) = 0,9^3 + 0,1^3$ kann so interpretiert werden:

D: Alle drei Eier haben eine Füllung oder alle drei Eier haben keine Füllung.

6.2

Baumdiagramm:



$$P(\text{goldenes Ei mit Füllung}) = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{9} = 0,1$$

$$P(\text{rotes Ei ohne Füllung}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{1}{30} \approx 0,033$$

Ein goldenes Ei mit Füllung kommt häufiger vor als ein rotes Ei ohne Füllung.

Folgende Füllung-Farbe-Kombinationen kommen am häufigsten vor:

"mit Füllung und rot" mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0,3$

"mit Füllung und blau" mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10} \cdot \frac{3}{9} = 0,3$

6.3

Die Zufallsvariable X sei der Auszahlungsbetrag des Unternehmens an den Kunden.

X kann folgende Werte annehmen: 50 Cent, 20 Cent, 15 Cent. und 0 Cent

Es ist der Erwartungswert der Zufallsvariablen X zu ermitteln.

$$\text{Es gilt: } P(X = 50 \text{ Cent}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{9} = \frac{1}{90}$$

$$P(X = 20 \text{ Cent}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{9} = \frac{1}{45}$$

$$P(X = 15 \text{ Cent}) = \frac{1}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{1}{15}$$

$$P(X = 0 \text{ Cent}) = P(\text{mit Füllung}) = 0,9$$

$$\text{Erwartete Auszahlung: } E(X) = 50 \cdot \frac{1}{90} + 20 \cdot \frac{1}{45} + 15 \cdot \frac{1}{15} + 0 \cdot 0,9 = 2 \text{ Cent}$$

Da der Einsatz 10 Cent beträgt, gewinnt das Unternehmen auf lange Sicht pro Ziehung 8 Cent.

Wenn das Unternehmen bei 250 Ziehungen mit 10 Euro zufrieden gibt, wäre dies pro Ziehung ein erwarteter Gewinn von $\frac{10}{250} = 0,04 \text{ Euro} = 4 \text{ Cent}$.

Das heißt, dass die erwartete Auszahlung an den Spieler pro Spiel 10 Cent - 4 Cent = 6 Cent betragen darf.

Die Auszahlung für ein goldenes Ei ohne Füllung sei nun a Cent.

$$\text{Erwartete Auszahlung: } E(X) = a \cdot \frac{1}{90} + 20 \cdot \frac{1}{45} + 15 \cdot \frac{1}{15} + 0 \cdot 0,9 = 6$$

Daraus ergibt sich $a = 410 \text{ Cent}$.

Der maximale Auszahlungsbetrag für ein goldenes Ei ohne Füllung beträgt 4,10 Euro.

6.4

Der gesuchte Anteil der Eier ohne Füllung sei p .

Der Anteil der Eier mit Füllung wäre dann $1 - p$.

Es soll gelten: $P(\text{Reklamation}) = P(\text{mindestens ein Ei ist nicht gefüllt}) = 0,05$

$$1 - P(\text{alle Eier sind gefüllt}) = 0,05$$

$$1 - (1 - p)^3 = 0,05 \Rightarrow (1 - p)^3 = 0,95 \Rightarrow 1 - p = \sqrt[3]{0,95} \Rightarrow p = 0,017 = 1,7\%$$

Der Anteil der Eier ohne Füllung darf höchstens 1,7% betragen.