

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2013

Baden-Württemberg

Aufgabe 5 Wirtschaftliche Anwendungen

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

Gegeben sind die Matrizen $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ und $C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -14 & a & -4 \\ -10 & 16 & -2 \\ b & -7 & c \end{pmatrix}$

5.1

Bestimmen Sie die Werte für a, b und c so, dass die Matrix C die inverse Matrix von B ist.
(5 Punkte)

5.2

Lösen Sie die Matrixgleichung nach X auf und geben Sie das Format der Matrix X an.

Die Matrix E ist eine Einheitsmatrix.

$$9BX - X + E = 3B(E + 2X) \quad (5 \text{ Punkte})$$

5.3

Gegeben sind die Matrizen A, E, H, M und T.

Die Matrix H hat das Format (2x4) und die Matrix T hat das Format (3x4).

Die Matrix E ist eine Einheitsmatrix.

Begründen Sie, welche Formate die Matrizen A, E und M haben müssen, damit die folgende Gleichung sinnvoll ist: $M(A - T) = H \cdot E$

(5 Punkte)

Aus den Rohstoffen Holz, Metall, Leder und Stoff werden in einer Möbelfabrik Tische, Stühle und Bänke hergestellt. Sie werden als Sitzgruppe Y, Sitzgruppe Art oder Sitzgruppe Out verkauft.

Den Materialbedarf in Mengeneinheiten (ME) sowie die Anzahlen der zu den Sitzgruppen gehörigen Möbel zeigen folgende Tabellen:

	Tisch	Stuhl	Bank
Holz	12	2	6
Metall	3	1	2
Leder	0	2	5
Stoff	0	1	2

	Sitzgruppe Y	Sitzgruppe Art	Sitzgruppe Out
Tisch	1	1	1
Stuhl	4	3	2
Bank	0	1	2

5.4

Im Lager befinden sich noch 610 ME Holz, 170 ME Metall, 115 ME Leder und 50 ME Stoff. Berechnen Sie, wie viele Tische, Stühle und Bänke höchstens von diesem Lagerbestand hergestellt werden können.
(4 Punkte)

5.5

Bestimmen Sie eine Tabelle, die den Zusammenhang zwischen Rohstoffen und Sitzgruppen angibt.

Ein Auftrag über 30 Sitzgruppen Y und 60 Sitzgruppen Art liegt vor.

Berechnen Sie den zusätzlichen Bedarf an Rohstoffen bzw. die Restbestände, wenn sich im Lager 1700 ME Holz, 800 ME Metall, 1100 ME Leder und 420 ME Stoff befinden.

(6 Punkte)

5.6

Von der letzten Produktionsperiode sind noch 33 Tische und 24 Bänke vorhanden. Daraus sollen alle drei Sitzgruppen zusammengestellt werden. Erfahrungsgemäß benötigt man doppelt so viele Sitzgruppen Art wie Sitzgruppen Out.

Wie viele der einzelnen Sitzgruppen können daraus zusammengestellt werden, wenn kein Tisch und keine Bank übrig bleiben soll ?

Wie viele Stühle müssen dazu noch produziert werden ?

(5 Punkte)

30 Punkte

Lösung

5.1

C ist die inverse Matrix von B, wenn $B \cdot C = E$ ist, wobei $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitsmatrix ist.

$$\begin{aligned} \text{1. Zeile Matrix B mal 1. Spalte Matrix C: } \frac{1}{6} \cdot (3 \cdot (-14) - 4 \cdot (-10) + 2b) &= 1 \\ \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot (-2 + 2b) &= 1 \Rightarrow b = 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1. Zeile Matrix B mal 2. Spalte Matrix C: } \frac{1}{6} \cdot (3 \cdot a - 4 \cdot 16 + 2 \cdot (-7)) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot (3a - 78) &= 0 \Rightarrow a = 26 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{1. Zeile Matrix B mal 3. Spalte Matrix C: } \frac{1}{6} \cdot (3 \cdot (-4) - 4 \cdot (-2) + 2 \cdot c) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{1}{6} \cdot (-4 + 2c) &= 0 \Rightarrow c = 2 \end{aligned}$$

$$\text{Die Matrix C lautet } C = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -14 & 26 & -4 \\ -10 & 16 & -2 \\ 4 & -7 & 2 \end{pmatrix}$$

5.2

Auflösen der Matrixgleichung:

$$9BX - X + E = 3B(E + 2X)$$

$$9BX - X + E = 3B + 6BX \quad | -6BX - E$$

$$3BX - X = 3B - E$$

$$(3B - E) \cdot X = 3B - E \quad | \cdot (3B - E)^{-1} \text{ von links}$$

$$X = (3B - E)^{-1} \cdot (3B - E) = E$$

Die Matrix X hat das Format (3 x 3).

5.3

Da die Matrix A von T subtrahiert wird, muss A das gleiche Format haben wie T.
Die Matrix A hat das Format (3 x 4).

Die Matrix E muss als Einheitsmatrix quadratisch sein.

Damit sie mit Matrix H mit dem Format (2 x 4) multipliziert werden kann, muss E genau so viele Zeilen haben, wie die Matrix H Spalten besitzt. Also muss E das Format (4 x 4) haben.

Im Ergebnis hat die Matrix $H \cdot E$ das Format (2 x 4).

Da A-T das Format (3 x 4) besitzt, muss die Matrix M das Format (2 x 3) haben.

Begründung: Die Spaltenanzahl von M muss der Zeilenanzahl von A - T entsprechen.

Die Zeilenanzahl von M muss der Zeilenanzahl von $H \cdot E$ entsprechen.

5.4

Es handelt sich hierbei um eine Aufgabe zur Materialverflechtung, bei der Holz, Metall, ... als Rohstoffe, Tisch, Stuhl, Bank als Zwischenprodukte und die Sitzgruppen als Endprodukte interpretiert werden können.

Gegeben ist der Rohstoffvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} 610 \\ 170 \\ 115 \\ 50 \end{pmatrix}$ sowie die

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Gesucht ist der Zwischenproduktvektor $\vec{z}$.

Formel: $\vec{r} = A \cdot \vec{z}$

Lösung des Gleichungssystems $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 6 & 610 \\ 3 & 1 & 2 & 170 \\ 0 & 2 & 5 & 115 \\ 0 & 1 & 2 & 50 \end{pmatrix}$ mit dem GTR

MATRIX[A] 4 x4	rref([A])
[12 2 6 610]	[[1 0 0 40]
[3 1 2 170]	[[0 1 0 20]
[0 2 5 115]	[[0 0 1 15]
[0 1 2 50]	[[0 0 0 0]]
4, 1=0	

Die Lösung lautet $z_1 = 40$, $z_2 = 20$, $z_3 = 15$.

Mit der letzten Matrixzeile als komplette Nullzeile werden diese Lösungen bestätigt.

Es können daher höchstens 40 Tische, 20 Stühle und 15 Bänke hergestellt werden.

5.5

Rohstoff-Zwischenprodukt-Matrix: $A = \begin{pmatrix} 12 & 2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Zwischenprodukt-Endprodukt-Matrix: $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

Die Rohstoff-Endprodukt-Matrix lautet: $C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 20 & 24 & 28 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 11 & 14 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

In der Tabelle C ist der gefragte Zusammenhang zwischen den Rohstoffgruppen und Sitzgruppen dargestellt:

	Sitzgruppe Y	Sitzgruppe Art	Sitzgruppe Out
Holz	20	24	28
Metall	7	8	9
Leder	8	11	14
Stoff	4	5	6

Es liegt ein Auftrag vor, der dem Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix}$ entspricht.

Gemäß der Formel $\vec{r} = C \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 20 & 24 & 28 \\ 7 & 8 & 9 \\ 8 & 11 & 14 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 60 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2040 \\ 690 \\ 900 \\ 420 \end{pmatrix}$

Man muss noch $2040 - 1700 = 340$ ME Holz nachbestellen.

Im Lager befinden sich nach der Produktion noch $800 - 690 = 110$ ME Metall

sowie $1100 - 900 = 200$ ME Leder.

Der Stoff wird komplett verbraucht.

5.6

Gegeben ist der Zwischenproduktvektor $\vec{z} = \begin{pmatrix} 33 \\ z_2 \\ 24 \end{pmatrix}$ und der Produktionsvektor $\vec{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ 2p_3 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Anwendung der Formel $\vec{z} = B \cdot \vec{p}$ führt auf folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_1 \\ 2p_3 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 \\ z_2 \\ 24 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} p_1 & +2p_3 & +p_3 & = & 33 \\ 4p_1 & +6p_3 & +2p_3 & = & z_2 \\ & 2p_3 & +2p_3 & = & 24 \end{matrix}$$

Aus der letzten Zeile folgt $p_3 = 6$.

Aus der 1. Zeile ergibt sich dann $p_1 = 15$ und aus der 2. Zeile $z_2 = 108$.

Es müssen noch 108 Stühle hergestellt werden.

Insgesamt können 15 Sitzgruppen Y, 12 Sitzgruppen Art und 6 Sitzgruppen Out zusammengestellt werden.