

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2013

Baden-Württemberg

Aufgabe 4 Analytische Geometrie

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

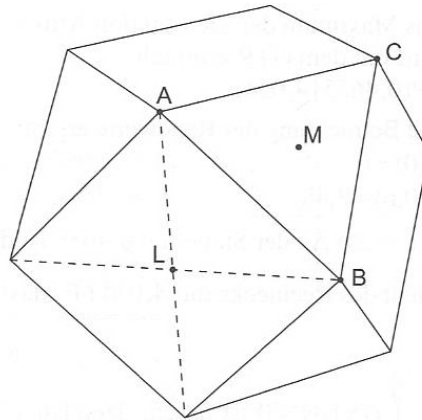
Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

Der abgebildete Körper zeigt einen Kuboktaeder. Dieser besteht aus acht gleichen Dreiecken und sechs gleichen Quadraten.
Gegeben sind die Punkte $A(6/-1/3)$, $B(6/2/0)$ und $C(3/2/3)$.



4.1

Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC gleichseitig ist.

Zeichnen Sie das Dreieck ABC in ein räumliches Koordinatensystem (x_2 – und x_3 -Achse mit $1 \text{ LE} = 1 \text{ cm}$, x_1 -Achse mit dem Schrägwinkel 45° und $1 \text{ LE} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ cm}$).

(6 Punkte)

4.2

Berechnen Sie die Oberfläche des Körpers.

(6 Punkte)

4.3

Das Dreieck ABC bildet mit dem Punkt $S(6/2/3)$ eine senkrechte Pyramide. $M(5/1/2)$ ist dabei der Mittelpunkt des Dreiecks ABC.

Vervollständigen Sie Ihre Zeichnung aus 4.1 zur Pyramide.

Zeigen Sie, dass der Punkt $T(3/-1/0)$ auf der Geraden durch den Punkt S und den Punkt M liegt.

(4 Punkte)

4.4

Geben Sie eine Gleichung für die Gerade g durch die Punkte A und B an.

Beschreiben Sie die besondere Lage der Geraden g im Koordinatensystem.

Zeigen Sie, dass sich die Gerade g und die Gerade durch die Punkte $L(6/-1/0)$ und S rechtwinklig schneiden.

Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.

(8 Punkte)

4.5

Berechnen Sie das Volumen der Pyramide ABCS.

Bestimmen Sie einen Punkt S^* so, dass das Volumen der Pyramide $ABCS^*$ doppelt so groß ist wie das Volumen der Pyramide ABCS.

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung

4.1

Berechnung der Seitenlängen des Dreiecks:

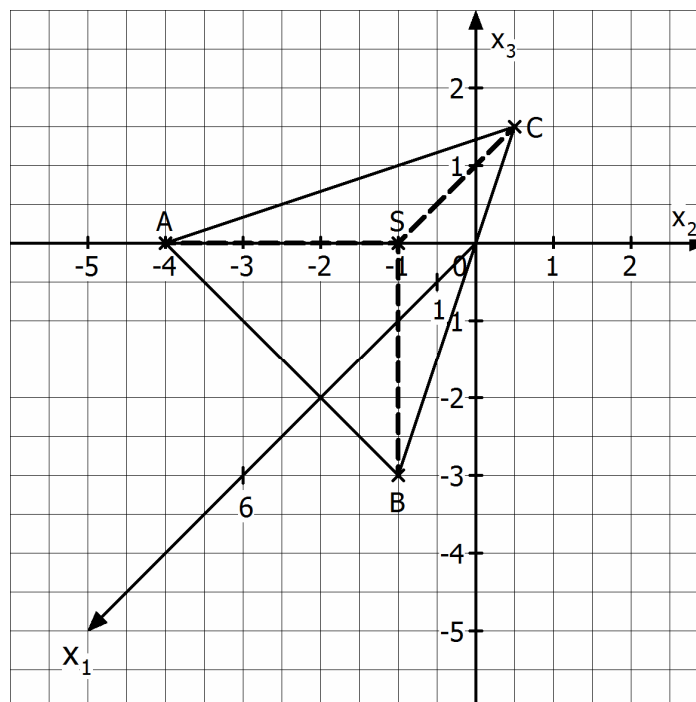
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0+9+9} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+0+9} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ mit } |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+9+0} = \sqrt{18}$$

Damit ist die Gleichseitigkeit des Dreiecks gezeigt.

Zeichnung (inklusive des Punktes S aus Teilaufgabe 4.3):



4.2

Die Oberfläche des Körpers setzt sich zusammen aus 8 gleichseitigen Dreiecken und 6 Quadraten.

Fläche der Quadrate:

Da die Quadratseiten mit der Länge der Dreiecksseiten aus 4.1 übereinstimmen, gilt für

deren Fläche $A_{\text{Quadrate}} = 6 \cdot (\sqrt{18})^2 = 108 \text{ FE}$

Fläche der Dreiecke:

Da die Dreiecke gleichseitig sind, gilt für deren Fläche gemäß Formelsammlung

$$A_{\text{Dreiecke}} = 8 \cdot \frac{1}{4} (\sqrt{18})^2 \cdot \sqrt{3} = 36\sqrt{3} \text{ FE}$$

Die Oberfläche des Körpers beträgt $O = 108 + 36\sqrt{3} \approx 170,35 \text{ FE}$

4.3

Geradengleichung durch S(6/2/3) und M(5/1/2):

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kontrolle, ob T(3/-1/0) auf der Gerade liegt durch Einsetzen der Koordinaten:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rcl} 3 & = & 6 - t \\ -1 & = & 2 - t \\ 0 & = & 3 - t \end{array} \quad \text{aus jeder Zeile folgt } t = 3.$$

Da sich in jeder Zeile derselbe Wert für t ergibt, liegt T auf der Gerade.

4.4

Geradengleichung g durch A(6/-1/3) und B(6/2/0):

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Besondere Lage von g:

Da die x_1 -Koordinate des Richtungsvektors 0 ist, ist die Gerade parallel zur $x_2 - x_3$ - Ebene.

$$\text{Gerade durch L(6/-1/0) und S(6/2/3): } \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Gerade g und die Gerade durch L und S schneiden sich rechtwinklig, da ihre Richtungsvektoren orthogonal zueinander stehen, was man mit Hilfe des Skalarproduktes

$$\text{nachweisen kann: } \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 + 9 - 9 = 0$$

Da das Skalarprodukt null ergibt, stehen die Vektoren und damit die Geraden senkrecht aufeinander.

Koordinaten des Schnittpunktes:

Gleichsetzen der beiden Geradengleichungen ergibt:

$$\begin{array}{rcl} 6 & = & 6 \\ -1 + 3s & = & -1 + 3r \\ 3 - 3s & = & 3r \end{array}$$

Addition der letzten beiden Zeilen ergibt: $2 = -1 + 6r \Rightarrow r = 0,5$

Einsetzen von $r = 0,5$ in die letzte Zeile: $3 - 3s = 1,5 \Rightarrow s = 0,5$

Da das Gleichungssystem eindeutig lösbar ist, existiert ein Schnittpunkt.

Einsetzen von $s = 0,5$ in die Gerade g ergibt den Schnittpunkt: $P(6 / 0,5 / 1,5)$

4.5

Für das Pyramidenvolumen gilt: $V = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Dreieck}} \cdot h$

Hierbei ist $A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{4} (\sqrt{18})^2 \sqrt{3} = \frac{9}{2} \sqrt{3}$ gemäß 4.2

Die Höhe der Pyramide entspricht dem Abstand der Punkte S und M :

$$\overline{MS} = |\overline{MS}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

Das Pyramidenvolumen beträgt $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{9}{2} \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 4,5 \text{ VE}$

Damit sich bei gleicher Grundfläche ABC das Pyramidenvolumen verdoppelt, muss der Punkt S^* doppelt so weit von der Grundfläche entfernt sein gegenüber S .

$$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OM} + 2 \cdot \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ also } S^*(7/3/4).$$

Alternativ dazu könnte der Punkt S^* auch auf der anderen Seite der Grundfläche liegen:

$$\overrightarrow{OS^*} = \overrightarrow{OM} - 2 \cdot \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ also } S^*(3/-1/0).$$