

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2013

Baden-Württemberg

Aufgabe 3 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

3.1

Das Schaubild einer Funktion ist symmetrisch zur y-Achse und verläuft durch den Punkt $S(0/3)$ und hat in $T(3/0)$ einen Tiefpunkt.

Geben Sie jeweils die Gleichung

- einer Polynomfunktion 4. Grades und

- einer trigonometrischen Funktion

an, deren Schaubild die genannten Bedingungen erfüllt.

(7 Punkte)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -5 \sin(10x) + 15$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f ist K_f .

3.2

Bestimmen Sie die ersten drei Ableitungen von f .

Geben Sie die Periodenlänge des Schaubilds K_f als Vielfaches von π an.

Geben Sie die exakten Koordinaten von vier Wendepunkten an.

(6 Punkte)

3.3

Das Schaubild K_p der Funktion p mit $p(x) = -20x^2 + 13$ schließt mit dem Schaubild K_f eine Fläche ein.

Berechnen Sie den Flächeninhalt mithilfe einer Stammfunktion.

(6 Punkte)

3.4

Der Ursprung und der Punkt $P(u/p(u))$ mit $0 \leq u \leq 0,6$ sind Eckpunkte eines achsenparallelen Rechtecks.

Für welchen Wert von u ist der Flächeninhalt des Rechtecks maximal?

Geben Sie den maximalen Flächeninhalt an.

(5 Punkte)

3.5

Begründen Sie, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind:

a) Es gilt $\int_0^{10} f(x) dx = 0$

b) Die Funktionen g mit $g(x) = -5 \sin(10x) + mx$ besitzt für jedes $m \in \mathbb{R}$ die gleichen Wendestellen wie die Funktion f .

c) Für $0,1 \leq x \leq 0,5$ ist die Tangentensteigung von K_f bei $x = 0,15\pi$ am größten.

(6 Punkte)

30 Punkte

Lösung

3.1

Gleichung der Polynomfunktion 4.Grades:

Das Schaubild hat bei $x = 3$ eine doppelte Nullstelle, da dort ein Tiefpunkt vorliegt. Da das Schaubild symmetrisch zur y -Achse ist, hat es bei $x = -3$ ebenfalls eine doppelte Nullstelle.

$$\text{Ansatz: } f(x) = a \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2$$

$$\text{Einsetzen von } S(0/3): 3 = a \cdot (-3)^2 \cdot 3^2 \Rightarrow a = \frac{1}{27}$$

$$\text{Die Funktionsgleichung lautet } f(x) = \frac{1}{27} \cdot (x - 3)^2 \cdot (x + 3)^2$$

Gleichung der trigonometrischen Funktion:

Da das Schaubild symmetrisch zur y -Achse ist, wird eine allgemeine Kosinusfunktion angesetzt: $f(x) = a \cdot \cos(bx) + c$

Der höchste Punkt ist mit $S(0/3)$ auf der Höhe 3, der tiefste Punkt mit $T(3/0)$ auf der Höhe 0.

Die waagrechte Mittellinie des Schaubildes verläuft auf der Höhe $\frac{3+0}{2} = 1,5$.

Damit ist $c = 1,5$.

Die Amplitude beträgt ebenfalls $a = 1,5$.

Die Periode des Schaubildes beträgt 6, damit ist $b = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$.

$$\text{Die Funktionsgleichung lautet } f(x) = 1,5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}x\right) + 1,5$$

3.2

Gegeben ist $f(x) = -5 \sin(10x) + 15$

Die ersten drei Ableitungen lauten

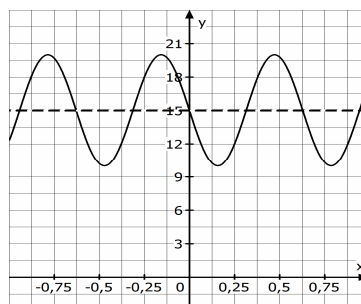
$$f'(x) = -5 \cos(10x) \cdot 10 = -50 \cos(10x)$$

$$f''(x) = 50 \sin(10x) \cdot 10 = 500 \sin(10x)$$

$$f'''(x) = 500 \cos(10x) \cdot 10 = 5000 \cos(10x)$$

Die Periodenlänge von f beträgt $p = \frac{2\pi}{10} = \frac{1}{5} \cdot \pi$

Wendepunkte von $f(x)$:



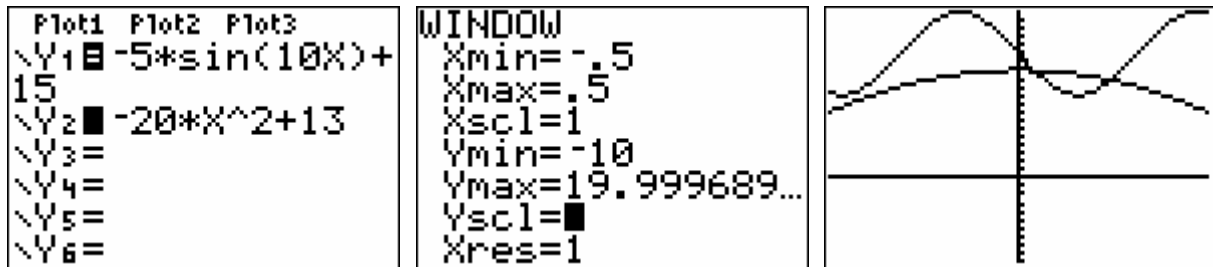
Man erkennt, dass sich die Wendepunkte auf der Höhe $y = 15$ befinden.

Ein Wendepunkt hat die Koordinaten $W_1(0/15)$.

Die anderen Wendepunkte haben jeweils einen Abstand von einer halben Periode:

$$W_2\left(\frac{\pi}{10}/15\right); W_3\left(\frac{\pi}{5}/15\right); W_4\left(\frac{3}{10}\pi/15\right)$$

3.3



Zur Berechnung der Fläche werden die Schnittpunkte der beiden Schaubilder benötigt.

Der GTR liefert als Schnittstellen $x = 0,0419$ und $x = 0,2448$

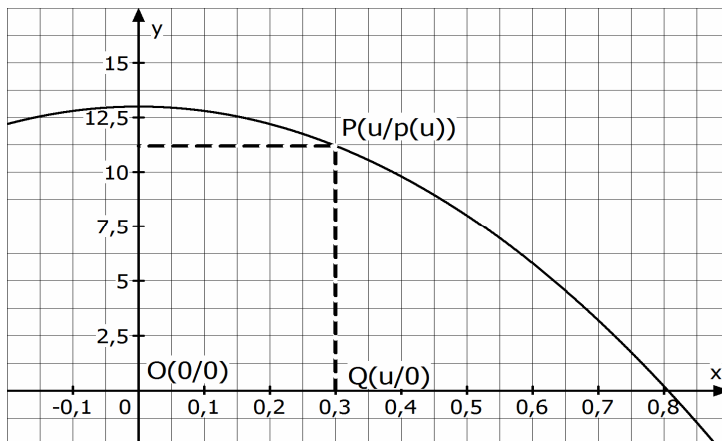
Die gesuchte Fläche hat den Inhalt

$$\int_{0,0419}^{0,2448} (-20x^2 + 13 - (-5\sin(10x) + 15))dx = \int_{0,0419}^{0,2448} (-20x^2 - 2 + 5\sin(10x))dx$$

$$= \left[-\frac{20}{3}x^3 - 2x - 5\cos(10x) \cdot \frac{1}{10} \right]_{0,0419}^{0,2448} \approx 0,3381 \text{ FE (GTR)}$$

Hinweis: Die Aufgabenstellung "Berechnen Sie mithilfe einer Stammfunktion" bedeutet, dass die Stammfunktion aufgestellt werden muss, aber man darf zur Berechnung des Integrals trotzdem den GTR verwenden (es wird kein exaktes Ergebnis verlangt).

3.4

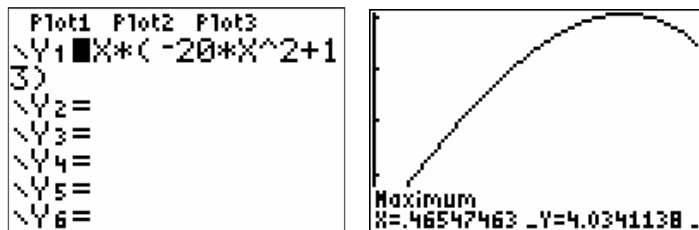


Die zu maximierende Rechtecksfläche hat die Formel $A = \overline{OQ} \cdot \overline{PQ}$

Mit den Koordinaten $P(u/p(u))$ und $Q(u/0)$ und $O(0/0)$ ergeben sich die Streckenlängen
 $\overline{OQ} = u - 0 = u$ und $\overline{PQ} = f(u) - 0 = f(u)$

Die Zielfunktion lautet $A(u) = u \cdot f(u) = u \cdot (-20u^2 + 13)$ mit $0 \leq u \leq 0,6$

Gesucht ist das Maximum der Zielfunktion, das mit dem GTR bestimmt wird.



Für $u = 0,465$ existiert ein Hochpunkt mit dem y-Wert 4,034.

Für die Randwerte gilt $A(0) = 0$ und $A(0,6) = 3,48$.

Somit ist der größte Wert mit 4,034 das absolute Maximum.

An der Stelle $u = 0,465$ ist der Flächeninhalt des Rechtecks mit 4,034 FE maximal.

3.5

a) $\int_0^{10} f(x) dx = 0$ ist falsch.

Gemäß GTR ergibt sich $\int_0^{10} f(x) dx \approx 149,93$.

b) Es ist $g'(x) = -50 \cos(10x) + m$ und $g''(x) = 500 \sin(10x)$

Die zweite Ableitung ist unabhängig von m.

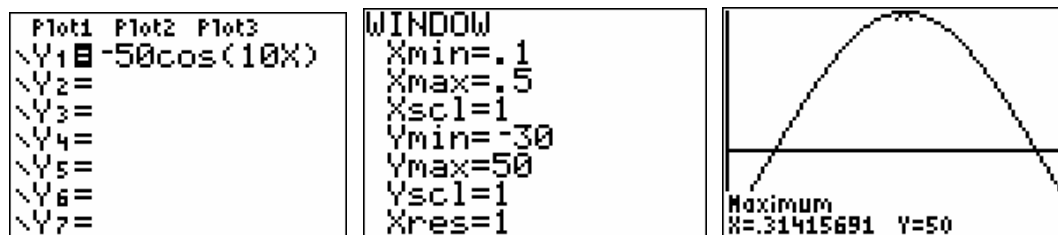
Da $g''(x) = f''(x)$ gilt, haben beide Funktionen dieselben Wendestellen.

Die y-Werte der Wendepunkte können sich jedoch unterscheiden.

Die Aussage ist wahr.

c) Die Tangentensteigung von f berechnet sich mit $f'(x) = -50 \cos(10x)$.

Einzeichnen der Funktionsgleichung in den GTR:



Das Maximum befindet sich bei 0,314 und nicht bei $0,15\pi \approx 0,471$.

Die Aussage ist falsch.