

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2013

Baden-Württemberg

Aufgabe 2 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

Gegeben ist die Funktionen g und f mit

$$g(x) = -e^{0,5x} + e \quad \text{und} \quad f(x) = -0,5x + e^{-x} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R}.$$

Ihre Schaubilder sind K_g und K_f .

2.1

Bestimmen Sie die exakten Koordinaten der Achsenschnittpunkte von K_g .

Ergänzen Sie die Skalierung im Koordinatensystem auf dem beigefügten Arbeitsblatt

(4 Punkte)

2.2

Zeichnen Sie die Asymptoten beider Kurven auf dem Arbeitsblatt ein und geben Sie die Gleichungen der Asymptoten an.

(6 Punkte)

2.3

Geben Sie die exakte Gleichung der Tangente t_g an K_g im Punkt $P(2/g(2))$.

Veranschaulichen Sie auf dem Arbeitsblatt, dass es eine Tangente t_f an K_f gibt, die parallel zu t_g verläuft.

(5 Punkte)

2.4

Begründen Sie mithilfe der Ableitungen, dass K_f keine Wendepunkte besitzt.

(3 Punkte)

2.5

Berechnen Sie den Inhalt der von K_f und K_g eingeschlossenen Fläche A .

A_1 ist der Flächenteil von A , der im ersten Quadranten liegt.

Geben Sie ein geeignetes Vorgehen zur Bestimmung des Flächeninhaltes von A_1 an.

(5 Punkte)

2.6

Zu jedem der abgebildeten Schaubilder A, B und C gehört eine der Funktionen f , g und h mit:

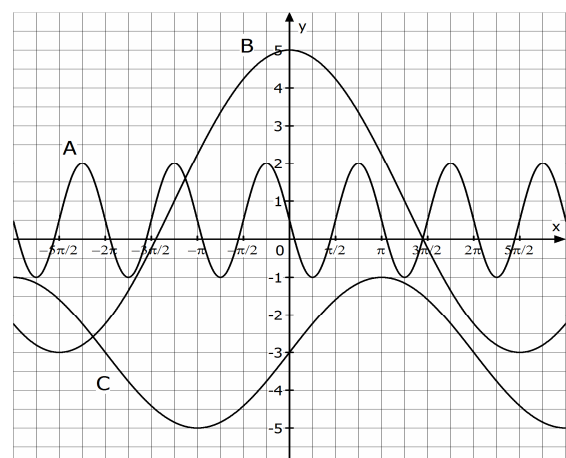
$$f(x) = 2 \sin(ax) + b$$

$$g(x) = c \cdot \sin(2x) + 0,5$$

$$h(x) = 1 + 4 \cos(dx)$$

Ordnen Sie jeder Funktion eines der Schaubilder zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bestimmen Sie a , b , c und d .

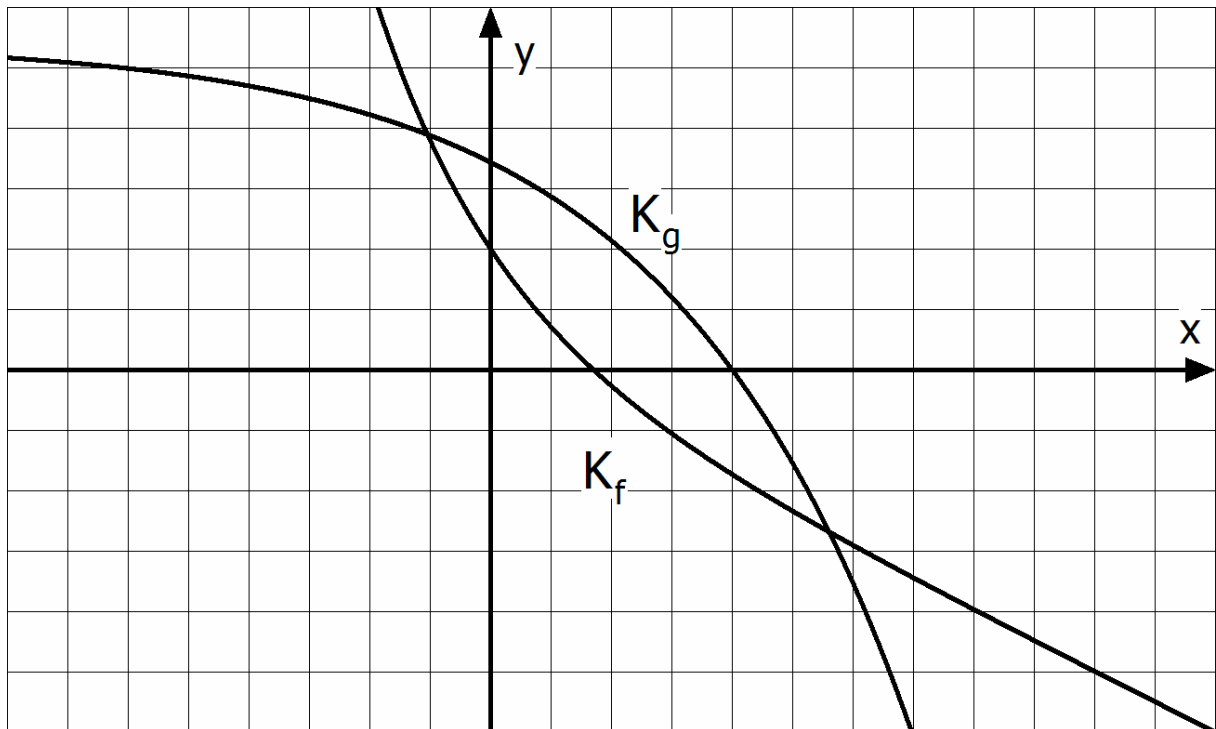


(7 Punkte)

30 Punkte

Arbeitsblatt:

Im folgenden Koordinatensystem sehen Sie K_f und K_g .



Zu 2.2

Asymptote von K_f : für $x \rightarrow$

Asymptote von K_g : für $x \rightarrow$

Lösung

2.1

Schnittpunkt von K_g mit der x-Achse: $g(x) = 0$

$$-e^{0,5x} + e = 0 \Rightarrow e = e^{0,5x} \xrightarrow{\ln} 1 = 0,5x \Rightarrow x = 2$$

Der Schnittpunkt mit der x-Achse lautet $N(2/0)$.

Schnittpunkt von K_g mit der y-Achse: $g(0) = -e^{0,5 \cdot 0} + e = -1 + e$

Der Schnittpunkt mit der y-Achse lautet $S_y(0 / -1 + e)$

2.2

Asymptote von K_g :

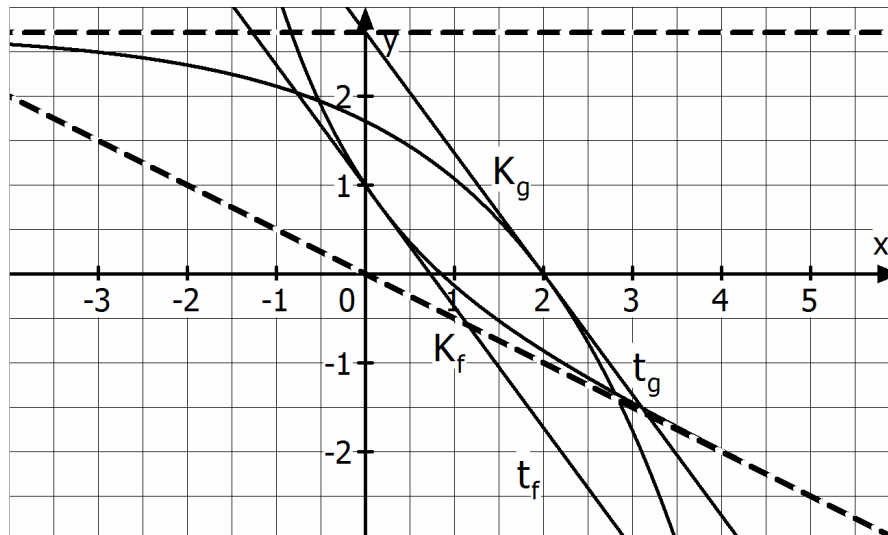
Für $x \rightarrow -\infty$ strebt $e^{0,5x} \rightarrow 0$ und daher $g(x) \rightarrow e$

Damit ist $y = e$ die waagrechte Asymptote für $x \rightarrow -\infty$

Asymptote von K_f :

Für $x \rightarrow +\infty$ strebt $e^{-x} \rightarrow 0$

Damit ist $y = -0,5x$ die schiefe Asymptote für $x \rightarrow +\infty$



2.3

Tangentengleichung in $P(2/g(2))$:

Allgemeine Tangentenformel: $y = g'(2) \cdot (x - 2) + g(2)$

Es ist $g'(x) = -0,5 \cdot e^{0,5x}$ mit $g'(2) = -0,5 \cdot e$

Desweiteren ist $g(2) = -e^{0,5 \cdot 2} + e = -e + e = 0$

Eingesetzt in die Tangentenformel: $y = -0,5e \cdot (x - 2) + 0 \Rightarrow y = -0,5e \cdot x + e$

Diese Tangente verläuft durch die Punkte $N(2/0)$ und $S_y(0/e)$.

Durch Parallelverschiebung von t_g auf dem Arbeitsblatt nach links erhält man zeichnerisch die Tangente t_f (siehe Abbildung bei 2.2.)

2.4

Es ist $f'(x) = -0,5 - e^{-x}$ und $f''(x) = e^{-x}$.

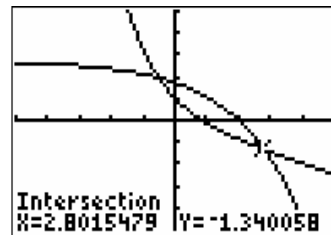
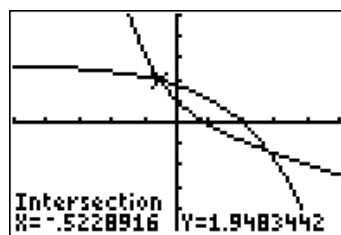
Notwendige Bedingung für Wendepunkte: $f''(x) = 0$

Die Gleichung $e^{-x} = 0$ ist nicht lösbar.

Deshalb hat K_f keine Wendepunkte.

2.5

Zur Berechnung der Fläche A werden die Schnittstellen der beiden Schaubilder benötigt. Diese werden mit dem GTR ermittelt.



Die Schnittstellen sind $x = -0,5229$ und $x = 2,8015$

$$A = \int_{-0,5229}^{2,8015} (g(x) - f(x)) dx = 2,7276 \text{ FE}$$

Schritte zur Berechnung der Fläche A_1 :

- 1.) Berechnung der Fläche zwischen $g(x)$ und der x-Achse: $\int_0^2 g(x) dx$
- 2.) Berechnung der Fläche zwischen $f(x)$ und der x-Achse: $\int_0^u f(x) dx$, wobei u die Nullstelle von $f(x)$ ist.
- 3.) Die Differenz der Flächeninhalte von 1.) und 2.) ergibt die Fläche A_1

2.6

Schaubild B: Es handelt sich um eine Kosinusfunktion, die um 1 nach oben verschoben wurde und die Amplitude 4 besitzt. Somit gehört Schaubild B zur Funktion $h(x)$, da die anderen beiden Funktionen Sinusfunktionen sind, die nicht nach rechts bzw. links verschoben wurden.

Die Periode von Schaubild B ist 5π . Somit ist $d = \frac{2\pi}{5\pi} = \frac{2}{5}$

Schaubild C: Es handelt sich um eine Sinusfunktion mit Amplitude 2 und Verschiebung um 3 nach unten.

Somit gehört Schaubild C zur Funktion $f(x)$. Da die Periode 4π ist, gilt $a = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2}$

Schaubild A gehört folglich zur Funktion $g(x)$. Da die Amplitude 1,5 ist, muss $c = 1,5$ oder $c = -1,5$ sein.

Da das Schaubild A die y-Achse jedoch von oben nach unten durchläuft, ist $c = -1,5$.