

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2013

Baden-Württemberg

Aufgabe 1 Analysis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Dezember 2013

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x + 1$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Das Schaubild von f heißt K_f .

1.1

Weisen Sie mithilfe der Ableitungen nach, dass $H(-1/2)$ Hochpunkt und $T(1/0)$ Tiefpunkt von K_f ist. Zeichnen Sie K_f .

(9 Punkte)

1.2

Für welche Werte von x ist K_f rechtgekrümmt ?

(2 Punkte)

1.3

Der Funktionsterm von f kann auch in der Form $f(x) = a(x+b)(x+c)^2$ geschrieben werden. Bestimmen Sie a , b und c .

(3 Punkte)

1.4

Geben Sie jeweils einen möglichen neuen Funktionsterm an:

a) K_f wird so verschoben, dass es drei Schnittpunkte mit der x -Achse hat.

b) K_f wird so verschoben, dass es die x -Achse im Ursprung berührt.

(4 Punkte)

1.5

Bestimmen Sie den Term einer Stammfunktion von f so, dass deren Schaubild durch den Tiefpunkt von K_f verläuft.

(4 Punkte)

Der Bestand an fester Holzmasse $h(t)$ zum Zeitpunkt t in einem Wald wird durch die Funktion

$$h(t) = 10^5 \cdot e^{0,02t}, \quad t \geq 0$$
beschrieben.

Dabei wird die Zeit t in Jahren und der Bestand $h(t)$ in m^3 gemessen.
($t=0$ steht für das Jahr 2013.)

1.6

Mit welchem Bestand wird im Jahr 2020 gerechnet ?

Nach welcher Zeit wird der Bestand erstmals über $150\,000\,m^3$ liegen ?

(3 Punkte)

1.7

Um wie viel Prozent nimmt der Holzbestand im Verlauf des ersten Jahres zu ?

(2 Punkte)

1.8

Nach wie vielen Jahren wird die momentane Änderungsrate $2500\,m^3 / \text{Jahr}$ betragen ?

(3 Punkte)

30 Punkte

Lösung

1.1

Nachweis der Extrempunkte:

Es ist $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$ und $f''(x) = 3x$.

Nachweis des Hochpunktes H(-1/2): Es ist $f'(-1) = \frac{3}{2}(-1)^2 - \frac{3}{2} = 0$ und $f''(-1) = -3 < 0$

Somit existiert bei $x = -1$ ein relatives Maximum.

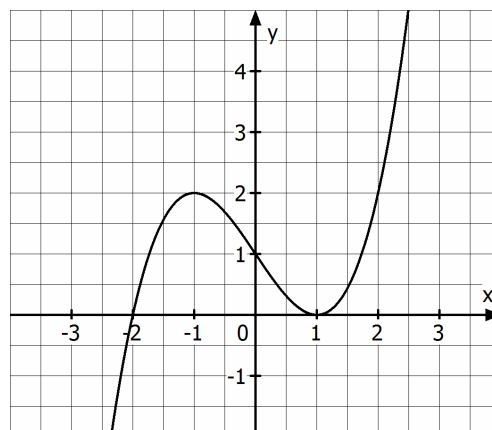
Wegen $f(-1) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} + 1 = 2$ lautet der Hochpunkt H(-1/2).

Nachweis des Tiefpunktes T(1/0): Es ist $f'(1) = \frac{3}{2} \cdot 1^2 - \frac{3}{2} = 0$ und $f''(1) = 3 > 0$

Somit existiert bei $x = 1$ ein relatives Minimum.

Wegen $f(1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} + 1 = 0$ lautet der Tiefpunkt T(1/0).

Zeichnung:



1.2

Das Schaubild K_f ist rechtsgekrümmt, wenn $f''(x) < 0$ ist.

Es gilt $f''(x) = 3x$.

Also muss gelten: $3x < 0 \Rightarrow x < 0$

Für $x < 0$ ist das Schaubild rechtsgekrümmt.

1.3

Der Wert von a entspricht dem Faktor vor dem höchsten Grad des Funktionsterms.

Der höchste Grad ist $\frac{1}{2}x^3 - \dots$ also ist $a = \frac{1}{2}$.

Bei $x = 1$ ist ein Tiefpunkt als doppelte Nullstelle, also ist $c = -1$.

Bei $x = -2$ ist eine einfache Nullstelle, also ist $b = 2$.

Die Funktion lautet $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x-1)^2$

1.4

- a) Damit das Schaubild drei Schnittpunkte mit der x -Achse hat, muss es nach unten verschoben werden, so dass der Hochpunkt immer noch über der x -Achse und der Tiefpunkt unter der x -Achse liegt. Möglich wäre eine Verschiebung von beispielsweise 1 Einheit nach unten.

$$g(x) = f(x) - 1 = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

- b) Damit das Schaubild den Ursprung berührt, muss es um 1 Einheit nach links verschoben werden.

$$g(x) = f(x+1) = \frac{1}{2}(x+1)^3 - \frac{3}{2}(x+1) + 1$$

1.5

Die allgemeine Stammfunktion von $f(x)$ lautet $F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x + C$

Der Wert von C muss so gewählt werden, dass $F(x)$ den Punkt $T(1/0)$ enthält.

$$F(1) = 0 \Rightarrow \frac{1}{8} - \frac{3}{4} + 1 + C = 0 \Rightarrow C = -\frac{3}{8}$$

$$\text{Also ist } F(x) = \frac{1}{8}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + x - \frac{3}{8}$$

1.6

Bestand im Jahr 2020: $h(7) = 10^5 \cdot e^{0,02 \cdot 7} \approx 115027 \text{ m}^3$

Zeitpunkt, bei dem Bestand über 150000 m^3 liegt:

$$150000 = 10^5 \cdot e^{0,02 \cdot t} \Rightarrow 1,5 = e^{0,02t} \Rightarrow \ln(1,5) = 0,02t \Rightarrow t = \frac{\ln(1,5)}{0,02} \approx 20,3 \text{ Jahre}$$

1.7

Prozentualer Änderung im ersten Jahr:

Es ist $h(0) = 100.000 \text{ m}^3$ und $h(1) = 102020 \text{ m}^3$

Der prozentuale Zuwachs im ersten Jahr beträgt $\frac{2020}{100000} = 0,0202 = 2,02\%$

1.8

Die momentane Änderungsrate wird durch die Ableitungsfunktion $h'(t) = 10^5 \cdot 0,02 \cdot e^{0,02t}$ beschrieben.

$$10^5 \cdot 0,02 \cdot e^{0,02t} = 2500 \Rightarrow 1,25 = e^{0,02t} \Rightarrow \ln(1,25) = 0,02t \Rightarrow t = \frac{\ln(1,25)}{0,02} = 11,2 \text{ Jahre}$$