

Hauptprüfung Fachhochschulreife 2012

Baden-Württemberg

Aufgabe 7 Mathematik in der Praxis

Hilfsmittel: grafikfähiger Taschenrechner

Berufskolleg

Alexander Schwarz

www.mathe-aufgaben.com

Februar 2015

7.1

Der Gewinn G (in Geldeinheiten GE) eines Unternehmens für die Herstellung von Holzspielzeug hängt von der Ausbringungsmenge x (in Mengeneinheiten ME) wie folgt ab:

$$G(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$$

Weiterhin ist bekannt, dass das Gewinnmaximum von 368 GE bei der Produktionsmenge 11 ME erzielt wird. Die Nutzengrenze liegt bei 15 ME. Diesem Gewinn liegt ein konstanter Stückpreis von 125 GE zugrunde.

Ermitteln Sie die Gewinnfunktion G sowie die Erlös- und Kostenfunktion.

(8 Punkte)

7.2

Durch Umstrukturierung im Produktionsablauf ändert sich die Kostenfunktion und hat jetzt die Form

$$K(x) = x^3 - 14x^2 + 100x + 600 \quad \text{mit } 0 \leq x \leq 20$$

7.2.1

Zeichnen Sie das Schaubild der Kostenfunktion in ein geeignetes Koordinatensystem.

(3 Punkte)

7.2.2

Zeigen Sie, dass die Kostenfunktion monoton wachsend ist.

(4 Punkte)

7.2.3

Berechnen Sie die langfristige Preisuntergrenze.

(3 Punkte)

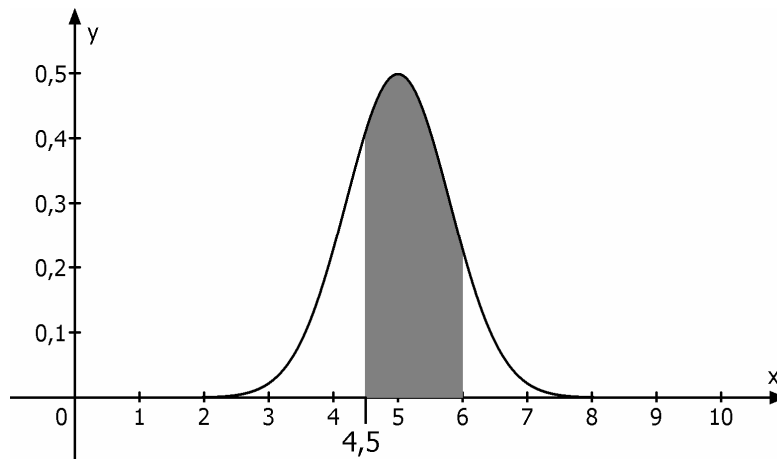
7.2.4

Bei welchem konstanten Stückpreis ist $x = 13$ die gewinnmaximale Produktionsmenge?

(4 Punkte)

7.3

Das Unternehmen stellt unter anderem Holzkugeln her. In einer langfristigen Untersuchung wurde der Durchmesser der Kugeln erfasst. Man stellte fest, dass der Durchmesser normalverteilt ist mit einem Mittelwert von $\mu = 5$ und einer Standardabweichung $\sigma = 0,8$. Die folgende Abbildung zeigt das Schaubild der zugehörigen Dichtefunktion.



7.3.1

Welche Bedeutung hat der Inhalt der markierten Fläche ?

7.3.2

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig herausgegriffene Kugel einen Durchmesser von mehr als 6,5 hat.

7.3.3

Durch eine Justierung der Herstellungsmaschine soll die Standardabweichung σ verringert werden.

Welche Bedeutung hat die Verringerung der Standardabweichung ?

Beschreiben Sie, wie sich diese Veränderung auf das Schaubild der Dichtefunktion auswirkt.

(8 Punkte)

30 Punkte

Lösung

7.1

Für die Gewinnfunktion gilt:

$$G(x) = -x^3 + bx^2 + cx + d$$

$$G'(x) = -3x^2 + 2bx + c$$

Bei 11 ME Gewinn von 368 ME: $G(11) = 368 \Rightarrow -1331 + 121 \cdot b + 11 \cdot c + d = 368$

Bei 11 ME Maximum: $G'(11) = 0 \Rightarrow -363 + 22b + c = 0$

Nutzengrenze bei 15 ME: $G(15) = 0 \Rightarrow -3375 + 225 \cdot b + 15 \cdot c + d = 0$

Aus den Bedingungen entsteht folgendes lineares Gleichungssystem:

$$121 \cdot b + 11 \cdot c + d = 1699$$

$$22 \cdot b + c = 363$$

$$225 \cdot b + 15 \cdot c + d = 3375$$

Mit dem GTR ergibt sich als Lösung $b = 14$, $c = 55$ und $d = -600$

$$G(x) = -x^3 + 14x^2 + 55x - 600$$

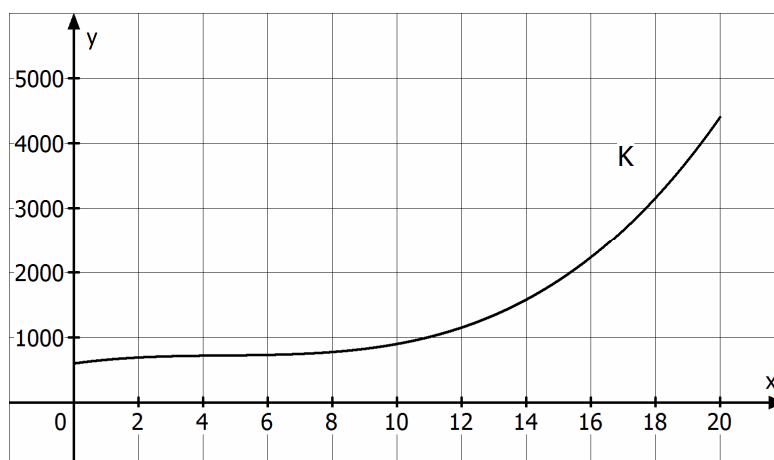
Die Erlösfunktion lautet aufgrund des angegebenen Stückpreises $E(x) = 125 \cdot x$

Die Kostenfunktion lautet

$$K(x) = E(x) - G(x) = 125x - (-x^3 + 14x^2 + 55x - 600) = x^3 - 14x^2 + 70x + 600$$

7.2.1

Schaubild von $K(x)$:



7.2.2

Das Schaubild von $K(x)$ wächst monoton, wenn $K'(x) \geq 0$ ist für $0 \leq x \leq 20$.

$$\text{Es gilt } K'(x) = 3x^2 - 28x + 100$$

Die Ableitungsfunktion ist eine nach oben geöffnete Parabel.

Berechnung des Scheitelpunktes (Tiefpunktes) von $K'(x)$:

Notwendige und hinreichende Bedingung: $K''(x) = 0$ und $K'''(x) > 0$

$$\text{Es gilt } K''(x) = 6x - 28 \text{ und } K'''(x) = 6$$

$$K''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 28 = 0 \Rightarrow x = \frac{14}{3}$$

$$K'''(\frac{14}{3}) = 6 > 0 \text{ und damit besitzt das Schaubild von } K'(x) \text{ bei } x = \frac{14}{3} \text{ einen Tiefpunkt.}$$

$$\text{Es gilt } K'(\frac{14}{3}) = 34,66.$$

Der tiefste Punkt der Parabelfunktion $K'(x)$ besitzt den y-Wert 34,66.

Somit kann das Schaubild von $K'(x)$ keine negativen Werte annehmen und es gilt $K'(x) \geq 0$.

Damit ist gezeigt, dass $K(x)$ monoton wächst.

7.2.3

Die langfristige Preisuntergrenze ist der Wert der Stückkostenfunktion in ihrem Minimum.

Zunächst muss das Minimum der Stückkostenfunktion $k(x) = \frac{K(x)}{x} = x^2 - 14x + 100 + \frac{600}{x}$ berechnet werden.

Notwendige und hinreichende Bedingung: $k'(x) = 0$ und $k''(x) > 0$

Mit dem GTR ergibt sich als Minimum von $k(x)$ die Stelle $x = 10$ mit $k(10) = 120$.

Die langfristige Preisuntergrenze beträgt 120 GE.

7.2.4

Der gesuchte Stückpreis sei p .

Die Erlösfunktion lautet $E(x) = p \cdot x$

Die Gewinnfunktion lautet $G(x) = p \cdot x - K(x) = -x^3 + 14x^2 - 100x + p \cdot x - 600$

$$\text{mit } G'(x) = -3x^2 + 28x - 100 + p$$

Bei $x = 13$ ME soll der Gewinn maximal sein:

$$G'(13) = 0 \Rightarrow -507 + 364 - 100 + p = 0 \Rightarrow p = 243 \text{ GE}$$

Der Stückpreis müsste bei 243 GE liegen.

7.3.1

Der Inhalt der Fläche stellt die Wahrscheinlichkeit dar, dass eine hergestellte Kugel einen Durchmesser von 4,5 bis 6 besitzt.

7.3.2

Die Zufallsvariable X stelle den Durchmesser der Kugel dar.

Berechnung von $P(X > 6,5)$ mit dem GTR:

$$P(X > 6,5) = 1 - P(X \leq 6,5) = 1 - 0,9696 = 0,0304$$

```
normalcdf
lower: -1E99
upper: 6.5
μ: 5
σ: 0.8
Paste
```

```
normalcdf(-1E99,
.9696037028
```

7.3.3

Die Standardabweichung stellt die durchschnittliche Abweichung der Kugeldurchmesser vom Mittelwert $\mu = 5$ dar.

Wird die Standardabweichung verringert, wird die Streuung um den Mittelwert geringer und verringert die Wahrscheinlichkeit, dass Kugeln mit größerer Durchmesserabweichung produziert werden. Die Qualität der Produktion hinsichtlich der Durchmessergerauigkeit wird verbessert.

Bei geringerer Standardabweichung bleibt die Dichtfunktion symmetrisch zur senkrechten Geraden $x = 5$, allerdings fällt die schneller und steiler ab.

Die durchgezogene Kurve stellt die alte Dichtefunktion dar.

Die gestrichelte Kurve wäre eine Dichtefunktion mit geringerer Standardabweichung.

